



(12) 发明专利

(10) 授权公告号 CN 103415258 B

(45) 授权公告日 2015. 05. 20

(21) 申请号 201180066669. 5

A61B 8/13(2006. 01)

(22) 申请日 2011. 12. 06

(56) 对比文件

(30) 优先权数据

61/420, 098 2010. 12. 06 US

US 2002131551 A1, 2002. 09. 19,

US 2006106307 A1, 2006. 05. 18,

US 2009024039 A1, 2009. 01. 22,

(85) PCT国际申请进入国家阶段日

2013. 08. 02

CN 1809317 A, 2006. 07. 26,

CN 1298688 A, 2001. 06. 13,

(86) PCT国际申请的申请数据

PCT/IL2011/050042 2011. 12. 06

审查员 廖叶子

(87) PCT国际申请的公布数据

W02012/077111 EN 2012. 06. 14

(73) 专利权人 索那利姆医疗有限公司

地址 以色列耶路撒冷

(72) 发明人 M·贝尔曼

(74) 专利代理机构 北京三友知识产权代理有限

公司 11127

代理人 吕俊刚 张旭东

(51) Int. Cl.

A61B 8/08(2006. 01)

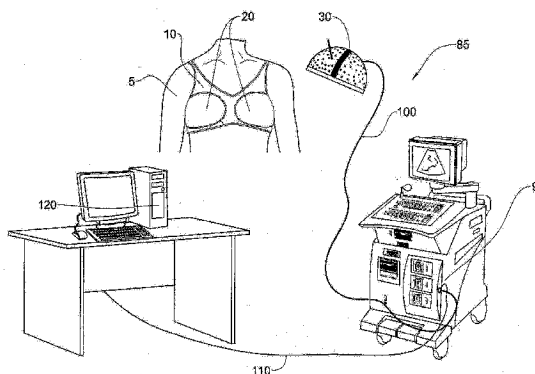
权利要求书3页 说明书44页 附图8页

(54) 发明名称

用于乳房的超声检测的系统和方法

(57) 摘要

本发明提供一种用于对身体部分的 2D 截面或者 3D 体积进行受限视场超声成像的系统和方法。超声传感器被配置为在空间上或者在时间上排列在受限视场圆弧中或者在诸如半球这样的凹面的至少一部分上。处理器从检测到的超声辐射计算波束成形(BF)函数并且从自由振幅计算点扩散函数(PSF)。从用于生成身体部分的 2D 截面或者 3D 体积的图像的 PSF 的傅里叶变换 $H_{BF}(k)$ 计算滤波器 $g(k)$ 。



1. 一种用于对身体部分的 2D 截面或者 3D 体积进行受限视场超声成像的系统,所述系统包括:

(a) 一个或者更多个超声传感器,所述超声传感器被配置为在空间上或者在时间上排列在从以下选择的阵列中:

(i) 具有圆心角 ξ 的受限视场圆弧, ξ 满足 $0 < \xi < 2\pi$,所述超声传感器产生多个振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$,其中 $f(\phi_r, \phi_t)$ 是当利用来自与所述受限视场圆弧的固定半径形成角 ϕ_t 的方向的入射辐射来探测所述身体部分时,在与所述固定半径形成角 ϕ_r 的方向上的超声辐射的振幅;其中 $0 < \phi_r, \phi_t \leq \xi$;

(ii) 凹面,所述超声传感器产生多个振幅 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$,其中 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 是当从由角 θ_t, ϕ_t 确定的透射方向和由角 θ_r, ϕ_r 确定的接收方向对所述身体部分进行探测时,超声辐射的振幅,其中 $\theta_r, \theta_t \in [0, \pi]$ 并且 $\phi_r, \phi_t \in [0, \pi]$;

(b) 处理器,所述处理器被配置为:

从 $f(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算波束成形 BF 函数;

计算自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$;

从所述自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算点扩散函数 PSF;

从所述 PSF 的傅里叶变换 $H_{\text{BF}}(k)$ 计算滤波器 $g(k)$;

计算所述 BF 函数的傅里叶变换 $I_{\text{BF}}(k)$;

将 $I_{\text{BF}}(k)$ 除以所述滤波器 $g(k)$ 以得到 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$, 以及

使用所述 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$ 产生所述身体部分的 2D 截面或者 3D 体积的图像。

2. 根据权利要求 1 所述的系统,所述系统还包括扫描装置,该扫描装置包括圆顶形结构,其中所述超声传感器被配置为在空间上或者在时间上排列在所述圆顶形结构的至少一部分上。

3. 根据权利要求 2 所述的系统,其中,所述圆顶形结构被配置为布置在女性被检者的乳房上。

4. 根据权利要求 2 或者 3 所述的系统,其中,所述圆顶形结构包括由透声材料形成的层。

5. 根据权利要求 2 所述的系统,其中所述超声波传感器是 C 臂断层成像传感器或 2D 阵列传感器。

6. 根据权利要求 2 所述的系统,其中,所述超声波传感器连接到被配置为在所述扫描装置上驱动所述超声传感器的步进马达组件。

7. 根据权利要求 6 所述的系统,其中,所述步进马达组件包括马达、编码器、处理器、索引器和驱动器。

8. 根据权利要求 5 所述的系统,其中,所述 C 臂断层成像传感器沿着圆形导轨移动。

9. 根据上述权利要求 1-3 中任一项所述的系统,所述系统还包括显示设备,并且其中,所述处理器被配置为在所述显示设备上显示所述图像。

10. 根据权利要求 9 所述的系统,其中,所述处理器还配置为在所显示的图像上叠加一个或者更多个 B 型复合图像或者断层成像图像。

11. 根据上述权利要求 1 或 2 所述的系统,所述系统还包括由被检者穿在所述身体部分

上的服装,所述服装包括由温度感应型透声聚合物形成的层,所述温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度处于第一粘性状态,在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态,所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘度。

12. 根据权利要求 11 所述的系统,其中,所述服装是胸罩。

13. 根据权利要求 2 所述的系统,所述系统还包括椅子,其中,所述扫描装置被设置在所述椅子中,所述圆顶形结构处于包括倒置方向在内的可调节方向。

14. 根据权利要求 11 所述的系统,其中,和接触所述身体部分的内表面相比,所述温度感应型透声聚合物层在外表面处更硬。

15. 根据上述权利要求 2 所述的系统,其中,所述圆顶形结构包括被配置为容纳活检针的一个或者更多个孔。

16. 一种用于权利要求 11 所述的系统的服装,所述服装被配置为由被检者穿在所述身体部分上,所述服装包括由温度感应型透声聚合物形成的层,所述温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度处于第一粘性状态,在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态,所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘度。

17. 一种用于权利要求 13 所述的系统的椅子,其中,所述扫描装置被设置在所述椅子中,所述圆顶形结构处于包括倒置方向在内的可调节方向。

18. 根据上述权利要求 1 或 2 所述的系统,所述系统包括机械地连接到 C 臂断层成像弧形物或者连接到所述凹面的超声传感器的 2D 阵列,并且其中,所产生的图像是实时 3D 图像。

19. 一种用于对身体部分的 2D 截面或者 3D 体积进行受限视场超声成像的方法,所述方法包括以下步骤:

(a) 提供扫描装置和一个或者更多个超声传感器,所述扫描装置包括圆顶形结构,所述超声传感器被配置为在空间上或者在时间上排列在从以下选择的阵列中:

(i) 具有圆心角 ξ 的受限视场圆弧, ξ 满足 $0 < \xi < 2\pi$, 所述超声传感器产生多个振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$ 其中 $f(\phi_r, \phi_t)$ 是当利用来自与所述受限视场圆弧的固定半径形成角 ϕ_t 的方向的入射辐射来探测平面截面时,在与所述固定半径形成角 ϕ_r 的方向上的超声辐射的振幅,其中 $0 < \phi_r, \phi_t < \xi$;

(ii) 凹面,所述超声传感器产生多个振幅 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$, 其中 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 是当从由角 θ_t, ϕ_t 确定的透射方向和由角 θ_r, ϕ_r 确定的接收方向对所述身体部分进行探测时,超声辐射的振幅,其中 $\theta_r, \theta_t \in [0, \pi]$ 并且 $\phi_r, \phi_t \in [0, \pi]$;

(b) 从所述 $f(\phi_r, \phi_t)$ 或者所述 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算波束成形 BF 函数;

(c) 计算自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$;

(d) 从所述自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算点扩散函数 PSF;

(e) 从所述 PSF 的傅里叶变换 $H_{\text{BF}}(k)$ 计算滤波器 $g(k)$;

(f) 计算所述 BF 函数的傅里叶变换 $I_{\text{BF}}(k)$;

(g) 将 $I_{\text{BF}}(k)$ 除以所述滤波器 $g(k)$ 以得到 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$; 以及

(h) 使用所述 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$ 产生所述身体部分的 2D 截面或者 3D 体积的图像。

20. 根据权利要求 19 所述的方法,所述方法还包括以下步骤:在空间上或者时间上将

所述超声传感器排列在所述圆顶形结构的至少一部分上。

21. 根据权利要求 20 所述的方法,其中,所述身体部分是乳房。

22. 根据权利要求 20 或者 21 所述的方法,其中,所述圆顶形结构包括由透声材料形成的层。

23. 根据权利要求 19 所述的方法,所述方法还包括以下步骤:在显示设备上显示所述图像。

24. 根据权利要求 23 所述的方法,所述方法还包括以下步骤:在所显示的图像上叠加一个或者更多个 B 型复合图像或者断层成像图像。

25. 根据权利要求 19 所述的方法,在被检者上在所述身体部分上方放置服装,所述服装包括由温度感应型透声聚合物形成的层,所述温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度处于第一粘性状态,在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态,所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘度。

26. 根据权利要求 25 所述的方法,其中,所述服装是胸罩。

27. 根据权利要求 19 所述的方法,其中,所述扫描装置被设置在椅子中,所述圆顶形结构处于包括倒置方向在内的可调节方向,并且所述方法还包括将所述身体部分放置在所述圆顶形结构中。

28. 根据权利要求 27 所述的方法,所述方法还包括以下步骤:在倒置的圆顶中插入温度感应型透声聚合物,所述温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度处于第一粘性状态,在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态,所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘度。

29. 根据权利要求 25 或者 28 所述的方法,其中,和接触所述身体部分的内表面相比,所述温度感应型透声聚合物层在外表面处更硬。

30. 根据权利要求 19 所述的方法,其中,将超声传感器的 2D 阵列机械地连接到 C 臂断层成像弧形物或者连接到所述凹面,并且其中,所述方法还提供产生实时 3D 图像。

用于乳房的超声检测的系统和方法

技术领域

[0001] 本发明涉及医疗设备,更具体地涉及用于通过超声进行医疗成像的设备。

背景技术

[0002] 下面的现有技术公开被视为与理解现有技术相关。

[0003] 1. 关于“Mammography and beyond:developing technologies for the early detection of breast cancer”的报道,

[0004] 2. U. S. A. Institute of Medicine and the Governing Board of the National Research Council, National Academy Press, 2101 Constitution Avenue, N. W. , Box 285, Washington, DC 20055.

[0005] 3. Chandra M. Sehgal 等人, Journal of Mammary Gland Biology and Neoplasia, 2006 年 4 月, 第 11 卷, 第 2 期.

[0006] 4. W. E. Svensso, “Breast Ultrasound Update”, ULTRASOUND, 2006 年 2 月, 第 14 卷第 1 期, 第 22-30 页。

[0007] 5. J. F. Greenleaf 等人的 quantitative cross-sectional imaging of ultrasound parameters, Ultrasonics Symposium Proc, IEEE Cat. #77CH1264-1SU, 第 989-995 页, 1977.

[0008] 6. Littrup PJ 等人 Proceedings of the 26th International Acoustical Imaging Symposium, Windsor, Canada; Sept. 9-12, 2001.

[0009] 7. Robert E. Frazer 在 1978 年发布的早期专利 “Coupling apparatus for ultrasonic medical diagnostic system”, 美国专利 no. 4, 130, 112.

[0010] 8. Tor C Anderson 等人的美国专利公开 No. 20060241423.

[0011] 9. 美国专利公开 20060173307.

[0012] 10. 美国专利公开 20070055159.

[0013] 11. Thomas R. Nelson 等人 Proceedings of SPIE—Volume 6510, March 2007.

[0014] 12. 美国专利 no. 4, 509, 368.

[0015] 13. 美国专利 no. 7, 025, 725.

[0016] 14. 美国专利 7, 264, 592.

[0017] 15. Karmanos Cancer Institute, Lawrence Livermore National Laboratory report [UCRL-JRNL-207220] 2004 年 4 月.

[0018] 16. Lawrence Livermore National Laboratory report [UCRL-JRNL-207220] 2004 年 4 月。

[0019] 17. 国际专利公开 W003/103500.

[0020] 18. 美国专利公开 20060241423.

[0021] 19. 美国专利 No. 5, 660, 185.

[0022] 20. 美国专利 No. 5, 664, 573.

- [0023] 21. A.Fenster 等人, Ultrasound Med Biol. Aug;27(8):1025-34, 2001.
- [0024] 22. J. F. Greenleaf 等人 Ultrasonics Symposium Proc, IEEE Cat. #77CH1264-1SU, 第 989-995 页, 1977 年。
- [0025] 23. 美国专利公开 No. 20060241423.
- [0026] 24. 美国专利公开 20060173307.
- [0027] 25. 美国专利公开 20070055159.
- [0028] 26. 美国专利 4, 509, 368.
- [0029] 27. 美国专利 7, 025, 725.
- [0030] 28. 美国专利 7, 264, 592.
- [0031] 29. 美国专利 No. 5, 660, 185.
- [0032] 30. 美国专利 No. 5, 664, 573.
- [0033] 31. Simonetti, F. &Huang, L. 2008, "From beamforming to diffraction tomography", J. Appl. Phys. 103, 103110.
- [0034] 32. 美国专利公开 2006/0009693.
- [0035] 33. Devaney, A. J. 1982, "A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography", Ultrason. Imaging4, 336-350.
- [0036] 34. Born, M. &Wolf, E. 1999Principles of optics. Cambridge, UK:Cambridge University Press.
- [0037] 35. Kak, A. C. &Slaney, M. 1988Principles of computerized tomographic imaging. New York, NY:IEEE Press
- [0038] 36. Y. L. Luke, Integrals of Bessel Functions, McGraw-Hill, New York, 1962, p. 331and332.
- [0039] 37. http://en.wikipedia.org/wild/Legendre_function.
- [0040] 38. http://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric_function.
- [0041] 39. http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function.
- [0042] 40. <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric>
- [0043] 2F1/03/07/07/01/
- [0044] 41. http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function
- [0045] 42. http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi-Anger_expansion
- [0046] 43. http://en.wikipedia.org/wiki/Angle_addition_formula#Angle_sum_and_difference_identities
- [0047] difference_identities
- [0048] 44. <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jkl/lectures/node102.html> (Spherical Harmonics)
- [0049] 45. W. Jarosz, N. Carr&H. W. Jensen, "Importance Sampling Spherical Harmonics", Journal compilation, 2008, The Eurographics Association and Blackwell Publishing Ltd.
- [0050] 46. R Mehremt, J T Londergant and M H Macfarlanet, "Analytic expressions for integrals of products of spherical Bessel functions", J. Phys. A:Math.

Gen. 24(1991)1435-1453.

[0051] 47. Edmonds A R1957 Angular Momentum in Quantum Mechanics (Princeton:Princeton University Academic Press

[0052] 48. M. R. Aguilar, C. Elvira, A. Gallardo, B. Vazquez, and J. S. Roman, "Smart polymers and Their Applications as Biomaterials", Topics in Tissue Engineering, Vol. 3, 2007. Eds. N Ashammakhi, R Reis & E Chiellini © 2007.

[0053] 49. S. F. Khattak, S. R. Bhatia, S. C. Roberts, "Pluronic F127 as a Cell Encapsulation Material: Utilization of Membrane-Stabilizing Agents", Tissue Engineering Volume 11, Number 5/6, 2005

[0054] 乳腺癌是癌症中引起死亡的原因之一。广泛认为早期检测能够通过 在癌症发展的较早阶段介入来降低乳腺癌死亡率。筛查 [X 射线] 乳房造影术已确立为女性的常规健康维护过程的优质标准——它是在大多数患者中提供高质量图像的成熟技术。

[0055] 然而,传统的乳房造影术并非检测全部乳腺癌(包括一些可触及的),并且由于乳房 X 线照片上的可疑发现而活检的全部乳房损伤中多达四分之三结果是良性的。

[0056] 对于具有致密乳房组织的女性(其患乳腺癌的风险增加),乳房 X 线照片特别难以解析。该致密组织干扰识别与肿瘤相关联的异常。因此,其它成像技术,特别是诸如磁共振成像和超声这样的非离子化模式,正在测试应用于乳腺癌。这些方法相比单独的 X 射线乳房造影术可以提供额外的诊断特异性。这些方法包括超声检查以及针刺活检或者手术活检。期望这些技术被改进为更准确和更少侵入性的治疗。

[0057] 例如为了从实体肿块辨别囊肿,通常在可疑发现物之后进行超声检查。此外,对于具有致密乳房组织的女性,超声甚至用于筛查。然而,乳房的多样的、异质的、复杂的结构使得比身体的其它区域更难以进行良好的超声成像。传统的超声具有有限的视场、不可再现并且产生作为穿透深度与图像分辨率之间折衷的结果。通常认为超声不能够可靠地检测微钙化点,这些微钙化点是乳腺癌的早期指示。传统的二维 [2D] 超声过程使在检查期间乳房动态地变形,因而难以确定肿瘤或者其它肿块的精确位置。传统超声的 2D 特性和在检查期间乳房的变形使得难以引导活检或者切除过程。

[0058] 在现有技术中尝试了引入 3D 乳房超声过程的多种方法。这些包括传统 3D 扫描以及超声计算机断层扫描。

[0059] 传统的 3D 扫描方法是由需要获取并显示实时数据而推动。因此,与声波的传播有关的一些复杂物理学被折衷。这些折衷中的其中一种对应于使用仅仅对纯粹的同质介质有效的直射理论(声波传播的真实物理学的基本近似)。第二个重要折衷是假定 2D 几何学,其中仅仅收集直接反向散射的反射。实际上,发射的脉冲与组织如此强烈地相互作用,使得产生声能量的“散射场”并且声波被分布在全部方向上。这意味着在传统的 3D 超声中,仅仅一小部分散射波到达检测器。因此,检测信号的强度弱,并且必须进行“波束成形”(将能量聚焦到特定方向)以放大返回信号。3D 以及四维 [4D] 标准换能器也用于乳房成像。使用它们的主要动机是需要获取并显示实时数据。如同利用 2D 传统超声,在利用这种换能器的检查期间乳房的变形妨碍确定肿瘤或者其它肿块的精确位置,并且使得难以引导活检或者切除过程。另外,如在传统 2D 超声中,这些换能器仅仅检测反向散射的声波,因而缺少以下讨论的断层成像法引入的优点。

[0060] 断层成像方法可以“不进行”这些折衷,使得信噪比明显增加,同时减少假象并且产生更高质量的图像以具有更大的临床灵敏度。此外,穿透乳房不再被反射回来的信号包含附加信息。这些透射信号可以用于计算未包括在反射数据中的声波参数,诸如声音速度和衰减,可能带来更大的临床特异性。现有技术对这个结论的贡献包括 J. F. Greenleaf 等人的开创性文章 [22]。

[0061] 开发能够便于在短时间扫描整个乳房体积的装置的多种障碍中的一个障碍是难以保持超声换能器与皮肤之间的良好接触以及保持从受控但是不灵活的扫描机构得到的图像质量。

[0062] 现有技术中提出了全视场乳房超声(FFBU)扫描装置和有关方法。例如,Anderson 等人的美国专利公开 20060241423 中公开了这种设备。然而,该设备要求挤压乳房。

[0063] Amara Arie 等人的美国专利公开 20060173307 描述了圆形乳房超声扫描仪(CBUS)。CBUS 系统对完整乳房自动成像。使用了用于以圆周运动或者螺旋运动移动标准 2D 超声换能器的机械设备。乳房被放置在中空[真空]壳体中。

[0064] Wang Shih-Ping 等人的美国专利公开 20070055159 描述用于促进乳房立体超声扫描的装置和有关方法。旋转锥形的径向扫描模板,因而移动超声换能器来扫描乳房。在机械组件上安装有柔性膜,以形成狭缝状开口,超声换能器通过该开口直接接触皮肤表面。在此过程中乳房必须被挤压。

[0065] Thomas R. Nelson 等人的出版物 [11] 公开了对下垂乳房成像的立体乳房超声扫描仪。通过在水平扫描模式和竖直扫描模式两者中使用高和低对比度测量对象用多种参数来表征它们的性能评估,这些参数包括:空间分辨率、均匀性和变形。与传统的超声图像相比,测试对象图像描绘了高回声和低回声肿块,并且呈现出良好的分辨率、软组织对比度和减少的斑点。

[0066] Whiting 等人的美国专利 No. 4, 509, 368 [26], 公开了用于临床诊断的超声断层成像的方法和装置。该装置包括在容器内可独立地操作的透射换能器和反射换能器的配对耦合件。

[0067] Donald P. Dione 等人的美国专利 No. 7, 025, 725 [27] 公开了具有多个圆柱环并且以锥形束的形式生成信号的成像器, Shehada, Ramez E. N. 的美国专利 No. 7, 264, 592 公开了乳房断层成像扫描仪,其被配置为将流体保持在乳房浸没于其中的静止腔室和可移动腔室内。

[0068] Lawrence Livermore National Laboratory report [UCRL-JRNL-207220] [16] 描述了超声断层成像使用环形几何形状用于乳房成像。乳房模型被浸没在流体槽中。从反射图像得到的空间分辨率是 0.4mm。所呈现的 10cm 的场深度优于传统超声的场深度,并且通过降低斑点噪声和整体上降低本底噪声来提高图像对比度。诸如声速的声学特性的图像表示能够测量 5m/s 的声速的变化。与 X 射线衰减的显著相关表示声速可以用于辨别各种类型的软组织。

[0069] 利用采用了乳房浸没于其中的充满液体的耦合腔室的设备,换能器不可避免地远离组织,因而超声波束的聚焦较差。

[0070] 国际专利公开 W003/103500 [17] 公开了具有能够保持超声换能器的安装结构和用于容纳和包围乳房组织的组织模制元件的设备。

[0071] 在 Anderson 等人的美国专利公开 20060241423 中描述了避免使用液体槽的另一种系统。乳房的一侧被膜或者薄膜片压缩,乳房的另一侧被刚性板和不平坦气泡压缩。保持换能器表面靠着薄膜的第二表面。随着换能器被移动,使用灌溉系统来保持在换能器表面与薄膜片之间的接口处持续地提供耦合剂。

[0072] 在美国专利 No. 5, 660, 185 和 No. 5, 664, 573 中公开了所提出的用于超声辅助活检过程的设备的示例。Fenster 等人 [21] 描述了三维超声引导乳房活检装置的进一步发展和评估。

[0073] 使用超声的衍射断层成像(DT)产生一叠 2D 断层成像图像,与通过 X 射线或者磁共振(MR)断层成像获得的图像类似。与 X 射线或者 MR DT 图像相比,超声 CT 图像不使用潜在有害的离子辐射。

[0074] 通过目标函数 $O(\mathbf{r}, \omega)$ 描述被成像的身体部分的平面截面,对于声波和无损目标,该目标函数如下

$$[0075] \quad O(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2 \left[\left(\frac{c_0}{c(\mathbf{r}, \omega)} \right)^2 - 1 \right] \quad (1)$$

[0076] 其中, \mathbf{r} 是入射平面波的方向, c_0 是在目标所浸没的均质背景中的声速, $c(\mathbf{r}, \omega)$ 是目标内部的本地声速, 并且 k_0 是背景波数, $2\pi/\lambda$, 其中 λ 是波长。DT 的目的是从一系列衍射实验确定目标函数 $O(\mathbf{r}, \omega)$ 并且从该目标函数生成图像。

[0077] 在乳房的超声 DT 中,使用围绕圆环排列的超声换能器阵列。将要被检查的乳房插入圆环中,并且随着圆环沿着大致垂直于轴身体表面的轴线相对于乳房移动,在圆环的位置序列的每个位置处获得超声图像。因而使用沿着 360° 弧布置的超声换能器阵列探测乳房的每一层,使得从基本上全部方向探测乳房的每一层。例如,在美国专利公开 2006/0009693 [32] 中公开了一种用超声换能器的圆形阵列扫描乳房的对乳房成像的系统。

[0078] 整个圆上的 DT 生成通过 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$ 给出的经低通滤波的图像,其中,

$\tilde{O}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{r} O(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 是目标函数 $O(\mathbf{r})$ 的二维傅里叶变换, $\Pi(|\mathbf{k}|) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{k}| < 2k_0 \\ 0 & |\mathbf{k}| > 2k_0 \end{cases}$, 其中 k_0 是入射波数。

[0079] 整个圆上的 DT 具有的优点是从全部方向探测乳房。然而,由于乳房的解剖结构,仅仅针对与乳房的轴线大致垂直的平面截面从全部方向探测乳房。另外,因为换能器的圆环具有固定直径,所以随着乳房被扫描,由于乳房朝着乳头的锥形,圆环和乳房之间的距离不均匀。

[0080] 波束成形(BF)法是利用已知工程和算法技术的超声成像的主要部分。考虑从沿着具有圆心角 $0 < \xi < 2\pi$ 的受限视场圆弧方向探测身体部分。在 BF 中,通过聚焦来自沿着圆弧的多个方向中的每个方向的入射波束生成目标函数 $O(\mathbf{r}, \omega)$, 并且针对这些入射声波的每个方向,确定散射线振幅。该散射测量的输出是振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$ 的集合,其中 ϕ_t 是入射波相对于圆弧的固定半径的角度, 并且 ϕ_r 是散射波相对于该固定半径的方向。所测量的 $f(\phi_r, \phi_t)$ 被相移并且被在阵列的孔径上积分,使得仅仅来自焦点的对散射场的贡献被相干地相加。如 Simonetti 和 Huang 2008 [31] 所示,对于连续的换能器集合,通过以下的 BF 函数获得这个两步处理

$$[0081] \quad \mathfrak{S}_{BF} = \int_0^\xi d\phi_r \int_0^\xi d\phi_t \times \quad (2)$$

(2)

$$[0082] \quad \exp[-ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot \mathbf{z}] f(\phi_r, \phi_t) \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_t) \cdot \mathbf{z}]$$

[0083] 其中 $\hat{\mathbf{u}}$ 是与角 ϕ 相关联的单位向量。

[0084] 可以从由下式定义的自由散射振幅获得与 BF 函数 (2) 相关联的点扩散函数：

$$[0085] \quad f_{free}(\phi_r, \phi_t) = N \exp\{-ik_0[\hat{\mathbf{u}}(\phi_t) - \hat{\mathbf{u}}(\phi_r)] \cdot \mathbf{r}\} \quad (3)$$

[0086] 其中 $N = \frac{\exp(\frac{i\pi}{4})}{\sqrt{8\pi k_0}}$ 还被称为空间脉冲响应 (SIR) 的波束成形点扩散函数 (PSF) 由以下给出：

$$[0087] \quad h_{BF}(\mathbf{z} - \mathbf{r}) = N \int_0^\xi d\phi_r \int_0^\xi d\phi_t \times$$

$$[0088] \quad \exp\{-ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_t) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} \quad (4)$$

[0089] 可以从关系 $I_{BF}(\mathbf{k}) = \tilde{O}(\mathbf{k})H_{BF}(\mathbf{k})$ 得到目标函数 $O(\mathbf{r})$ ，其中 $I_{BF}(\mathbf{k})$ 、 $\tilde{O}(\mathbf{k})$ 和 $H_{BF}(\mathbf{k})$ 分别是 BF 函数 \mathfrak{S}_{BF} 、 $O(\mathbf{r})$ 和 $h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r})$ 的二维傅里叶变换。与从衍射断层成像实验获得的图像相比，在从整个圆弧探测目标的波束成形过程中从目标函数生成的图像 $I_{BF}(\mathbf{k})$ 通常将发生失真。

[0090] 尽管已经研究了波束成形和断层扫描之间的“全部空间 (full world)” (在二维空间中的整个圆弧) 关系，但是扩展到受限视场空间 (二维中的受限视场圆弧和诸如三维空间中的半球体这样的受限视场球体) 是现有技术中未知的。

发明内容

[0091] 在其第一方面，本发明提供一种用于使用超声辐射对身体部分成像的系统。

[0092] 在本发明的一个实施方式中，使用空间上或者时间上布置在具有圆心角 $0 < \xi < 2\pi$ 的受限视场圆弧上的超声换能器阵列来探测身体部分的平面截面。在对乳房成像的情况下，使用换能器的弧允许获得乳房的不必与乳房的轴线垂直的平面截面的图像。可以在不必与乳房的轴线垂直的多个方向上将波束施加在乳房上。因而，通过在多个方向上在乳房上方移动单个换能器阵列可以顺序地探测乳房的平面截面。

[0093] 在本发明的这个实施方式中，该系统包括被配置为从振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$ 从身体部分的平面截面生成图像的处理器的。发明人在以下关系中导出了滤波器 $g(\mathbf{k})$ 的显式形式，

$$[0094] \quad I_{BF}(\mathbf{k}) = \tilde{O}(\mathbf{k})H_{BF}(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k})\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|) \quad (5)$$

[0095] 其中 $I_{BF}(\mathbf{k})$ 是式 (2) 中的受限视场 BF 函数 \mathfrak{S}_{BF} 的二维傅里叶变换， $H_{BF}(\mathbf{k})$ 是式 (4) 中的 $h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r})$ 的二维傅里叶变换。附件 A 中提供了 (5) 的推导。由于项 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$ 表示全视场衍射断层成像的已知结果，滤波器 $g(\mathbf{k})$ 构成映射以获得衍射断层成像结果。可以从受限视场 $H_{BF}(\mathbf{k})$ 的显式形式得到该滤波器 $g(\mathbf{k})$ (如在附件 A 中所导出的)：

$$[0096] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = N \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i^{2n_1-2n_2}}{n_1 n_2} (e^{i(n_1-n_2)\xi} - e^{-in_2\xi} - e^{in_1\xi} + 1) e^{i(n_2-n_1)\phi} I_{n_1, n_2, n_2-n_1}$$

[0097] 其中 I_{n_1, n_2, n_2-n_1} 是 n_1 、 n_2 、 n_2-n_1 阶的 3 个贝塞尔函数的乘积的积分。这些积分在附件 A 中示出, 线性地包括低通滤波器 $\Pi(|\mathbf{k}|)$, 即, $H_{BF}(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \Pi(|\mathbf{k}|)$, 因而限定了滤波器 $g(\mathbf{k})$ 的显式形式。

[0098] 根据本发明的这个实施方式, 处理器首先计算如以上说明的 $I_{BF}(\mathbf{k})$ 。 $I_{BF}(\mathbf{k})$ 接着乘以滤波器 $g(\mathbf{k})$ 的倒数, 得到 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$, 即, 所产生的身体部分的平面截面的断层成像图像。最终, 使用波束成形技术生成断层成像图像。

[0099] 在本发明的另一个实施方式中, 使用空间上或者时间上布置在诸如半球这样的弯曲表面上的超声换能器阵列来探测身体部分的三维截面。在本实施方式中, 通过函数 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 给出散射振幅, 其中, (θ_t, ϕ_t) 是透射波束的球坐标, (θ_r, ϕ_r) 是反射波束的球坐标, $\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t \in [0, \pi]$ 并且 $\phi_r, \phi_t \in [0, 2\pi]$ 。通过在目标空间中在 $r=z$ 处聚焦入射波束, 标准 BF 在像空间的点 z 处产生目标的图像。如在二维(平面)实施方式中, 得到的散射场随后被相移并且被在阵列的孔径上积分, 使得仅仅来自焦点的对散射场的贡献被相干地相加。通过以下的 3D BF 函数得到此两步骤过程:

[0100]

$$\mathfrak{S}_{BF} = \int_D \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot \mathbf{z}] f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t) \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) \cdot \mathbf{z}]$$

[0101] 其中 D 是球体上的受限视场域。对于半球的特殊情况, 其为:

[0102]

$$\mathfrak{S}_{BF} = \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \int_0^\pi d\phi_t \int_0^\pi d\theta_t \sin \theta_t \times$$

[0103] $\exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot \mathbf{z}]$

[0104] $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t) \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) \cdot \mathbf{z}]$ (6)

[0105] 在以上算式中, $\hat{\mathbf{u}}$ 是与角 θ 和 ϕ 相关联的单位向量。如在二维实施方式中, 式(6)中的第二个指数表示透射中的聚焦, 而第一个指数对应于接收到的散射场的聚焦。通过考虑在位置 r 处的点散射体的图像, 可以获得与函数(6)相关联的点扩散函数(PSF)。在此情况下, 三维自由散射振幅是 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$

[0106] $= \exp\{-ik_0[\hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) + \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r)] \cdot \mathbf{r}\}$ (7)

[0107] 并且三维 PSF 为

[0108] $h_{BF} = \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \int_0^\pi d\phi_t \int_0^\pi d\theta_t \sin \theta_t \times$

[0109] $\exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]] \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]]$ (8)

[0110] 发明人研究出了按照以下形式的针对 $h_{BF}(z-r)$ 的三维傅里叶变换 H_{BF} 的解析表达式：

$$[0111] \quad H_{BF}=g(k) \Pi(|k|), \text{ 其中 } \Pi(|k|) = \begin{cases} 1 & |k| < 2k_0 \\ 0 & |k| > 2k_0 \end{cases} \quad (9)$$

[0112] 附件 B 中提供了 (9) 的推导。DT 问题包括从一组散射实验中重构函数 $O(r)$ 。通过进行 $O(r)$ 的三维傅里叶变换而获得的空间频率域 (K 空间) 中的目标函数可以由下式表示：

$$[0113] \quad \tilde{O}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r O(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (10)$$

[0114] 波束成形图像：

[0115]

$$\mathfrak{I}_{BF} = \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dr_2 \int_{-\infty}^{\infty} dr_3 O(\mathbf{r}) h(|z-\mathbf{r}|) \quad (11)$$

[0116] 在空间频率域中为 (使用式 8)

$$[0117] \quad I_{BF}(\mathbf{k}) = \tilde{O}(\mathbf{k}) H_{BF}(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \tilde{O}(\mathbf{k}) \Pi(|\mathbf{k}|) \quad (12)$$

[0118] 附件 B 中提供了 (12) 的推导。

[0119] 尽管在整个球体上的 DT 产生经低通滤波的图像, $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$, BF 算法引入了由式 (12) 中的附加滤波器 $g(k)$ 描述的失真。因此, 通过将滤波器 $\frac{1}{g(\mathbf{k})}$ 应用到 BF 图像可以从 BF 图像获得 DT 图像。

[0120] 在其它方面中, 本发明提供用于引导诸如身体部分中活检或者切除的过程的超声装置和方法。通过空间配准将用于过程引导的实时三维图像 (“4D 超声成像”) 叠加到高分辨率断层成像图像顶上。这通过将用于产生三维实时图像的二维阵列换能器机械地耦合到布置在本发明的第一方面的二维实施方式的圆弧上的超声换能器的阵列, 或者耦合到布置在用于产生断层成像图像的本发明的第一方面的三维实施方式的半球上的超声阵列而得以实现。

[0121] 因此, 在本发明的方面的一个方面, 本发明提供一种用于身体部分的 2D 截面或者 3D 体积的受限视场超声成像的系统, 所述系统包括：

[0122] (a) 一个或者更多个超声传感器, 所述超声传感器被配置为在空间上或者在时间上按照从以下选择的阵列排列：

[0123] (i) 具有圆心角 ξ 的受限视场圆弧, ξ 满足 $0 < \xi < 2\pi$, 所述超声传感器产生多个振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$, 其中 $f(\phi_r, \phi_t)$ 是当利用来自与受限视场圆弧的固定半径形成角 ϕ_t 的方向的入射辐射对身体部分进行探测时, 在与受限视场圆弧的固定半径形成角度 ϕ_r 的方向上的超声辐射的振幅；其中 $0 < \phi_r, \phi_t < \xi$ ；

[0124] (ii) 凹面, 所述超声传感器产生多个振幅 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$, 其中 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 是当从由角 θ_t, ϕ_t 确定的透射方向和由角 θ_r, ϕ_r 确定的接收方向对身体部分进行探测时, 超声辐射的振幅, 其中 $\theta_r, \theta_t \in [0, \pi]$ 并且 $\phi_r, \phi_t \in [0, \pi]$ ；

[0125] (b) 处理器, 所述处理器被配置为:

[0126] 从 $f(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算波束成形 (BF) 函数;

[0127] 计算自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$;

[0128] 从自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算点扩散函数 (PSF);

[0129] 从 PSF 的傅里叶变换 $H_{\text{BF}}(k)$ 计算滤波器 $g(k)$;

[0130] 计算 BF 函数的傅里叶变换 $I_{\text{BF}}(k)$;

[0131] 将 $I_{\text{BF}}(k)$ 除以滤波器 $g(k)$ 以得到 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$, 以及

[0132] 使用 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$ 产生身体部分的 2D 截面或者 3D 体积的图像。

[0133] 本发明的系统还可以包括含有圆顶形状结构的扫描装置, 其中所述超声传感器被配置为在空间上或者在时间上排列在所述圆顶结构的至少一部分上。所述圆顶形状结构可以被配置为布置在女性的乳房上。所述圆顶形状结构可以包括由透声材料形成的层。

[0134] 本发明的系统可以包括一个或者更多个 C 臂断层成像传感器和一个或者更多个 2D 阵列传感器。所述传感器可以连接到被配置为在所述扫描装置上驱动所述超声传感器的步进马达组件。所述步进马达组件可以包括马达、编码器、处理器、索引器和驱动器中的一个或者更多个。C 臂断层成像换能器可以例如沿着圆形导轨移动。

[0135] 本发明的系统可以还包括显示设备, 并且所述处理器可以被配置为在所述显示设备上显示图像。所述处理器可以还被配置为在所显示的图像上叠加一个或者更多个 B 型复合图像或者断层成像图像。

[0136] 本发明的系统可以还包括由被检者穿在所述身体部分上的服装, 所述服装包括由温度感应型透声聚合物形成的层, 所述温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度 θ 处于第一粘性状态, 在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态, 所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘度。

[0137] 本发明的系统可以还包括椅子, 其中, 所述扫描装置被设置在所述椅子中, 所述圆顶处于倒置方向。

[0138] 与接触身体部分的内表面相比, 所述温度感应型透声聚合物层在外表面处可以更硬。

[0139] 所述圆顶可以包括被配置为容纳活检针的一个或者更多个孔。

[0140] 本发明还提供一种用于本发明的系统中使用的服装, 所述服装被配置为由被检者穿戴在所述身体部分上, 所述服装包括由温度感应型透声聚合物形成的层。

[0141] 本发明还提供一种用于本发明的系统中使用的椅子, 其中, 所述扫描装置被设置在所述椅子中, 所述圆顶处于包括倒置方向在内的可调节方向。

[0142] 本发明的系统可以还包括机械地耦合到 C 臂断层成像弧形物或者耦合到所述凹面的超声传感器的 2D 阵列, 并且所述产生的图像可以是实时 3D 图像。

[0143] 在本发明的方向的另一方面, 本发明提供一种用于对身体部分的 2D 截面或者 3D 体积进行受限视场超声成像的方法, 所述方法包括以下步骤:

[0144] (a) 提供一个或者更多个超声传感器, 所述超声传感器被配置为在空间上或者在时间上按照从以下选择的阵列排列:

[0145] (i) 具有圆心角 ξ 的受限视场圆弧, ξ 满足 $0 < \xi < 2\pi$, 所述超声传感器产生

多个振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$, 其中 $f(\phi_r, \phi_t)$ 是当利用来自与所述受限视场圆弧的固定半径形成角 ϕ_t 的方向的入射辐射来探测平面截面时, 在与所述固定半径形成角 ϕ_r 的方向上的超声辐射的振幅, 其中 $0(\phi_r, \phi_t < \xi$;

[0146] (ii) 凹面, 所述超声传感器产生多个振幅 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$, 其中 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 是当从由角 θ_t, ϕ_t 确定的透射方向和由角 θ_r, ϕ_r 确定的接收方向对所述身体部分进行探测时, 超声辐射的振幅, 其中这些角度满足 $\theta_r, \theta_t \in [0, \pi]$ 并且 $\phi_r, \phi_t \in [0, \pi]$;

[0147] (b) 从 $f(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算波束成形 (BF) 函数;

[0148] (c) 计算自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$;

[0149] (d) 从所述自由振幅 $f_{\text{free}}(\phi_r, \phi_t)$ 或者 $f_{\text{free}}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 计算点扩散函数 (PSF);

[0150] (e) 从 PSF 的傅里叶变换 $H_{\text{BF}}(k)$ 计算滤波器 $g(k)$;

[0151] (f) 计算所述 BF 函数的傅里叶变换 $I_{\text{BF}}(k)$;

[0152] (g) 将 $I_{\text{BF}}(k)$ 除以滤波器 $g(k)$ 以得到 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$; 以及

[0153] (h) 使用所述 $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$ 产生所述身体部分的 2D 截面或者 3D 体积的图像。

[0154] 所述身体部分例如可以是乳房。

[0155] 本发明的方法可以还包括在空间上或者时间上将所述超声传感器排列在所述圆顶结构的至少一部分上。所述圆顶形结构可以包括由透声材料形成的层。

[0156] 本发明的方法可以还包括在显示设备上显示所述图像。本发明的方法可以还包括在所显示的图像上叠加一个或者更多个 B 型复合图像或者断层成像图像。

[0157] 本发明的方法可以还包括在被检者上在所述身体部分上方放置服装, 所述服装包括由温度感应型透声聚合物形成的层, 所述温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度处于第一粘性状态, 在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态, 所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘度。

[0158] 在本发明的方法中, 所述扫描装置可以被设置在所述椅子中, 所述圆顶处于包括倒置方向在内的可调节方向, 并且所述方法还包括将所述身体部分放置在所述圆顶中。可以将温度感应型透声聚合物引入到圆顶中, 该温度感应型透声聚合物在 37°C 以下的第一温度处于第一粘性状态, 在 37°C 以上的第二温度处于第二粘性状态, 所述第二粘性状态的粘度高于所述第一粘性状态的粘性。与接触身体部分的内表面相比, 所述温度感应型透声聚合物在外表面处可以更硬。

[0159] 本发明的方法可以还包括: 在所述圆顶结构的孔中插入活检针并且获得活检。

[0160] 本发明的方法可以利用被机械地连接到 C 臂断层成像弧形物或者连接到所述凹面的超声传感器的 2D 阵列, 并且其中, 所述方法还可以包括产生实时 3D 图像。实时 3D 图像可以用于引导手术或者引导过程工具通过所述身体部分。

附图说明

[0161] 为了理解本发明并理解如何在实践中实施本发明, 现在仅通过非限制性示例, 参照附图来描述一些实施方式, 在附图中:

- [0162] 图 1 示出根据本发明的一个实施方式的用于对身体部分进行受限视场成像的系统；
- [0163] 图 2 示出用于图 1 的系统中的布置在乳房上的扫描装置；
- [0164] 图 3 示出图 2 的扫描装置的内部部件；
- [0165] 图 4 从正视图(图 4a)、左侧视图(图 4b)、倾斜视图(图 4c)和右侧视图(图 4d)示出图 2 的扫描装置的盖；
- [0166] 图 5 示出包括温度感应型透声聚合物的胸罩的罩杯；
- [0167] 图 6 示出图 2 的扫描装置的 C 臂断层成像换能器；
- [0168] 图 7 示出图 2 的扫描装置的 2D 阵列换能器；
- [0169] 图 8 示出图 2 的扫描装置的 C 臂换能器(图 8a)和 2D 阵列换能器(图 8b)；
- [0170] 图 9 示意地示出图 2 的扫描装置的步进马达；
- [0171] 图 10 从俯视图(图 10a)、二轴视图(图 10b)、正视图(图 10c)和右侧视图(图 10d)示出图 2 的扫描装置的 C 臂和 2D 阵列换能器；
- [0172] 图 11 示出用于本发明的系统中的椅子；
- [0173] 图 12 示出图 2 的扫描装置；以及
- [0174] 图 13 示出图 12 的扫描装置的步进马达。

具体实施方式

[0175] 为了清楚并且便于描述,将针对乳房成像来描述本发明,明显的是本发明的系统和方法可以被修改以对任何期望的身体部分成像。

[0176] 图 1 示出根据本发明的一个实施方式的用于对乳房进行超声成像的系统 85。系统 85 包括以下将详细描述圆顶形扫描装置 30,其被构造为在其内部容纳被检者 5 的乳房。扫描装置 30 通过电缆组件 100 而固定到超声系统 90。控制电缆 110 将超声系统 90 连接到工作站 120。工作站 120 可以包括用于显示图像的 CRT 屏幕 123。诸如键盘 124 这样的用户输入装置允许用户输入与检查有关的各种参数,诸如被检者的个人细节或者超声辐射的参数(频率、强度等)。

[0177] 在本发明的一个实施方式中,如图 1 所示,系统包括被配置为由被检者 5 穿戴的胸罩 10,并且扫描装置 30 被配置为经由胸罩的罩杯 20 放置在乳房上。在本发明的另一个实施方式中,如图 11 所示,扫描装置 30 被结合到具有座位 17 的椅子 7 中,被检者 5 坐在座位 17 上。扫描装置 30 被定位在椅子 7 上,其开口在顶部。被检者 5 坐在椅子 17 上并且将要被成像的乳房插入到扫描装置 30 中。椅子 7 可以在各种位置进行调整以容纳不同大小的被检者。

[0178] 图 3 到图 10、图 12 和图 13 更详细地示出扫描装置 30。首先参照图 3,扫描装置包括由诸如 Aqualene™这样的透声聚合物制成的圆顶结构 21。C 臂断层成像换能器 40 和 2D 阵列换能器 50 被定位在圆顶 20 的顶部。换能器 40 和 50 连接到步进马达组件 80,该步进马达组件 80 连接到具有针孔 71 的扫描装置盖 70。在图 4 中更详细示出了盖 70,其中示出扫描装置连接到步进马达组件 80 的盖 70 的正视图(图 4a)、左侧视图(图 4b)、倾斜视图(图 4c)和右侧视图(图 4d)。在使用中,圆顶 20 被定位在乳房和与外表面 22 接触的换能器 40、50 之间。图 6 和图 7 示出换能器 40 和 50 的较近视图。在图 6 中示出 C 臂断层成像

换能器 40 的凹形声学堆栈 41。图 6 中还示出 C 臂断层成像换能器 40 的滑轨 42。图 7 示出 2D 阵列换能器 50 的声学堆栈 51 及其滑动表面 52。在图 8 中从两个方向(底部倾斜视图(图 8a)和顶部倾斜视图(图 8b))示出步进马达组件 80 和换能器 40 和 50。C 臂换能器 40 连接到圆形导轨 71,该圆形导轨 71 使得借助步进马达组件 80 能够进行旋转。图 8a 还示出声学堆栈 41 和 51。

[0179] 从工作站 120 对扫描装置 30 的步进马达组件 80 进行控制。图 13 示出步进马达组件 80,图 9 示意地示出步进马达组件 80。马达组件 80 包括具有旋转轴 81 的马达 82。编码器 202 包括处理器 120、索引器 84 和驱动器 83。编码器 202 直接连接到马达 200 的弧形轴,以减少或者防止间隙(backlash)。在马达组件 80 中,齿轮轴 204 用作弧形旋转轴。驱动器 83 接收时钟脉冲和方向信号,并且将这些信号转换为步进马达 82 中的适当的相位电流。索引器 84 创建时钟信号和方向信号。工作站 120 或者处理器 121 向索引器 84 发送命令。

[0180] 步进马达组件 80 驱动圆顶 20 上的两个换能器 40 和 50。在图 10 中示出描述步进马达组件 80 驱动的运动的方向的一组视图。图 10a 示出俯视图,图 10b 示出二轴视图(dimeric view),图 10c 中示出正视图,图 10d 示出右侧视图。旋转箭头 85 示出 C 臂断层成像换能器 40 沿着圆形导轨 71 (图 8)的旋转方向,倾斜旋转箭头 87 示出 C 臂断层成像换能器 40 的倾斜旋转,并且滑动双箭头 86 示出 2D 阵列换能器 50 沿着 C 臂断层成像换能器 40 滑动的方向。箭头 85、86 和 87 指示的运动全部由步进马达组件 80 驱动。

[0181] 图 12 更详细地示出扫描装置和步进马达。对于要被成像的乳房的每一个平面截面,换能器 40 和 50 沿着圆弧运动。适配器 61 是由诸如 Aqualene™这样的透声材料制成,以确保换能器的声学堆栈和圆顶之间没有空气。截面的平面并非必须垂直于乳房的轴线。圆弧的方向由步进马达监测并且被连续地输入到处理器 121。换能器 40 和 50 可以作为 B 型超声探测器,使得能够从这些换能器获得图像的复合成像。另选地,对于每对接收换能器和透射换能器,可以测量透射信号。透射图像可以与 B 型复合图像进行组合或者与由压电传感器弧产生的反射断层成像图像进行组合。

[0182] 图 2 示出将扫描装置 30 放置在如图 5 详细示出的胸罩 10 的罩杯 20 上的被检者。罩杯 20 包括外部织物层 23 和内部织物层 25。在内层和外层之间是温度感应型透声聚合物 27。温度感应型透声聚合物 27 的状态依赖于温度,使得在室温下其处于液态,而在人体温度($\sim 37^{\circ}\text{C}$)下处于固态。这种聚合物的示例是非离子表面活性多元醇、也称为 Pluronic F127™的共聚物泊洛沙姆(poloxamer)407。可以在 Khattak 等人的出版物 [49] 找到关于多元醇、共聚物泊洛沙姆 407 与人体组织接触时的安全性的讨论。

[0183] 将乳房插入聚合物材料处于粘性形式的圆顶 21,使得聚合物材料在按照乳房表面的形状固化之前,其内表面符合乳房表面的形状。与接触乳房的结构的内表面相比,聚合物材料在其接触声学堆栈的外表面处可以更硬。沿着聚合物材料的这种硬度梯度使得能够产生优异的外球体表面,并且保持调节的灵活性以适应乳房的复杂表面。另选地,上覆圆顶迫使聚合物材料的外表面采用球形形状。聚合物材料是声耦合材料,其在声学上将乳房表面与在圆顶外表面上的换能器耦合。这使得胸罩的罩杯 20 的内表面符合乳房的表面,从而在罩杯和乳房之间没有空气。这允许在乳房处于自然形状的情况下对乳房扫描。温度感应型透声聚合物 20 可以是可消毒的。

[0184] 在使用中,乳房插入到扫描装置 30 的圆顶 21 中。如果正在佩戴胸罩 10,则还可以在胸罩与圆顶 20 的内表面之间引入温度感应型透声聚合物,从而在胸罩的外表面和圆顶的内表面之间没有空气。另选地,如果使用椅子 7 (图 11),则倒置的圆顶 30 可以在插入乳房之前填充温度感应型透声聚合物。

[0185] 将扫描装置 30 应用于乳房之后,换能器 40 和 50 被一次驱动一个,并且对于每个被驱动的换能器,每个换能器检测超声辐射。每个换能器检测到的超声被该换能器转换为电信号,该电信号指示经由电缆 100 输入到超声系统 90 的检测的波的振幅(在 2D 断层成像的情况下为 $f(\phi_r, \phi_t)$,在 3D 断层成像的情况下为 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$)。

[0186] 超声系统 90 包括处理器,该处理器被配置为从输入自换能器的信号中生成 2D 或者 3D 图像。如上所述,首先计算 $I_{BF}(k)$ 。接着通过乘以滤波器 $g(k)$ 的倒数计算 $I_{DT}(k)$,以生成作为乳房的断层成像图像的 $I_{DT}(\mathbf{k}) = \tilde{O}(\mathbf{k})/\Pi(|\mathbf{k}|)$ 。该断层成像图像可以与 B 型复合图像组合以及与来自换能器 40 和 50 的透射型图像组合。由于这些另选的硬件配置被机械地耦合到弧形物,因而能够叠加这些不同类型的图像,从而能够进行空间配准。

[0187] 2D 声学堆栈阵列 51 产生用于过程引导(例如在活检中引导针或者引导切除装置)的实时 3D 图像(“4D 超声成像”)。滑轨 42 和滑动表面 52 用于将 2D 换能器阵列布置在相对于乳房的最优位置以用于引导过程。当操作 2D 换能器阵列 50 时,C 臂断层成像换能器 40 保持静止。可以通过盖 70 中的针孔并且透过温度感应型透声聚合物 20 插入诸如图 3 中的针 60 的操作设备。2D 换能器阵列 50 机械地附接到 C 臂断层成像换能器 40 使得允许将实时 3D 图像叠加在 C 臂断层成像换能器 40 产生的高分辨率断层成像图像之上。附件 A针对受限视场凹孔径的衍射断层成像算法

[0188] 讨论了基于二维波束成形(BF)算法的二维 DT 的新推导,来作为对诸如滤波反传播法¹的标准 DT 算法的替代方法。假定通过对下式的标量波场 ψ 解来描述散射问题,

[0189]

$$H\psi(\mathbf{r}, k_0 \hat{\mathbf{r}}_0, \omega) = -O(\mathbf{r}, \omega)\psi(\mathbf{r}, k_0 \hat{\mathbf{r}}_0, \omega) \quad (13)$$

[0190] 其中 H 是 2D $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2)$ 中的亥姆霍兹算子, k_0 是背景波数 ($2\pi/\lambda$), $\hat{\mathbf{r}}_0$ 代表照射目标的入射平面波的方向,并且是 ω 是角频率。单位向量 $\hat{\mathbf{r}}_0$ 由极角 ϕ_t 定义。

[0191] 通过所谓的目标函数来描述目标,目标函数依赖于用于对目标进行探测的波场的类型:对于电磁波感测,其通过关系 $O(\mathbf{r}) = k_0^2[n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1]$ 与折射率² $n(\mathbf{r}, \omega)$ 有关,并且对于声学波,义与声速和衰减系数³ 有关。具体地,对于无损耗目标

$$O(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2 \left[\left(\frac{c_0}{c(\mathbf{r}, \omega)} \right)^2 - 1 \right] \quad (14)$$

[0193] 其中 c_0 是目标所浸没的均质背景的声速, $c(\mathbf{r}, \omega)$ 是目标内的本地声速。由于色散和能量耗散现象,目标函数依赖于 ω 。在本节其余部分进行的分析将考虑单色波场;因此,省略了对 ω 的明显依赖。

[0194] 受限视场弧线上的二维波束成形算法

[0195] 假定散射振幅 $f(\phi_r, \phi_t)$ 可以作为照射和检测方向的连续函数而进行测量, $\phi_r, \phi_t \in [0, \xi]$ (请注意对于完整圆, $\phi_r, \phi_t \in [0, 2\pi)$, 这些角与相对于标准极坐标系

的 x 轴的角相对应。原理上,这可以通过布置在受限视场圆弧上的部分地包围目标的收发器阵列来实现。

[0196] 标准 BF 通过将入射波束聚焦到目标空间中的 $r=z$ 来在像空间的点 z 处产生目标的图像。得到的散射场随后被相移并且在阵列的孔径上积分,使得仅仅焦点对散射场的贡献被相干地相加。通过 BF 函数获得此两步骤处理

[0197]

$$\mathfrak{S}_{BF} = \int_0^\xi d\phi_r \int_0^\xi d\phi_t \times$$

$$\exp[-ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot \mathbf{z}] f(\phi_r, \phi_t) \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_t) \cdot \mathbf{z}] \quad (15)$$

[0199] -----

[0200] ¹Devaney, A.].1982,、A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography”,Ultason. Imaging4,336 — 350.

[0201] ²Born, M • &Wolf, E • 1999 Principles of optics. Cambridge, UK:Cambrige Univerity Press.

[0202] ³Kak, A. C. &Slaney, M. 1988Principles of computerized tomogrphicc imaging. New York, NYIEEE Press.

[0203] 其中 $\hat{\mathbf{u}}$ 是与角 ϕ 相关联的单位向量。如针对完整圆二维情况由脚注⁴所讨论的,式(III)中的第二个指数代表透射中的聚焦,而第一个对应于接收的散射场的聚焦。通过考虑在位置 r 的点散射体的图像,可以获得与函数(2)相关联的点扩散函数(PSF)。在此情况下,自由散射振幅是

$$f_{free}(\phi_r, \phi_t) = N \exp\{-ik_0[\hat{\mathbf{u}}(\phi_t) - \hat{\mathbf{u}}(\phi_r)] \cdot \mathbf{r}\} \quad (16)$$

[0205] 其中 $= \frac{\exp(\frac{i\pi}{4})}{\sqrt{8\pi k_0}}$, 并且也称为空间脉冲响应(SIR)的点扩散函数(PSF)为:

$$h_{BF}(\mathbf{z} - \mathbf{r}) = N \int_0^\xi d\phi_r \int_0^\xi d\phi_t \times$$

$$\exp\{-ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_t) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} \quad (17)$$

[0207] $\hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r}) = |\mathbf{z} - \mathbf{r}| \cos \alpha$, 其中 α 是接收单位向量 $\hat{\mathbf{u}}(\phi_r)$ 和向量 $\mathbf{z} - \mathbf{r}$ 之间的角。将 $\mathbf{z} - \mathbf{r}$ 的角标记为 ϕ' , $\alpha = \phi_r - \phi'$ 。

[0208] Jacobi-Anger 展开为:

$$\exp\{ik_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}| \cos(\alpha)\} = J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \cos(n\alpha)$$

[0210] 其中 J_n 是 n 阶贝塞尔函数。

[0211] 我们得到⁵:

$$\int_0^\xi d\phi_r \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} = \xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \int_0^\xi d\phi_r \cos[n(\phi_r - \phi')] =$$

$$= \xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \int_0^\xi d\phi_r [\cos(n\phi_r) \cos(n\phi') + \sin(n\phi_r) \sin(n\phi')]$$

$$\int_0^\xi d\phi_r \cos(n\phi_r) = \frac{1}{n} \sin(n\phi_r) \Big|_0^\xi = \frac{1}{n} \sin(n\xi);$$

$$[0215] \quad \int_0^\xi d\phi_r \sin(n\phi_r) = -\frac{1}{n} \cos(n\phi_r) \Big|_0^\xi = -\frac{1}{n} [\cos(n\xi) - 1] = \frac{1}{n} [1 - \cos(n\xi)]$$

$$[0216] \quad \int_0^\xi d\phi_r \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]\} = \\ = \xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \{\sin(n\xi) \cos(n\phi') + [1 - \cos(n\xi)] \sin(n\phi')\}$$

[0217] 针对透射角获得复共轭结果。因此通过下式得出 $h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r})$:

$$[0218] \quad h_{BF}(\mathbf{z} - \mathbf{r}) =$$

$$[0219] \quad N \left(\xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \{\sin(n\xi) \cos(n\phi') + [1 - \cos(n\xi)] \sin(n\phi')\} \right)^* \times \\ \left(\xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \{\sin(n\xi) \cos(n\phi') + [1 - \cos(n\xi)] \sin(n\phi')\} \right)$$

[0220]

[0221] ⁴Simonetti, F&Huang, L, 2008, "From beamforming to diffraction to mography",] • Appl. Phys103, 103110

[0222] ⁵ $\sin(A+B)=\sin A \cos B+\cos A \sin B$; $\sin(A-B)=\sin A \cos B-\cos A \sin B$; $\cos(A+B)=\cos A \cos B$

[0223] $\sin A \sin B$; $\cos(A-B)=\cos A \cos B+\sin A \sin B$ <http://www.ies.co.math/iavatrikahotekahote.html>

[0224] 特殊情况 : 请注意当 $\xi = 2\pi$ (即, 完整圆) 时, 接收和发射的波束为 :

$$[0225] \quad \int_0^{2\pi} d\phi_r \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} = 2\pi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|)$$

[0226] 因此, 对于 $\xi = 2\pi$, $h_{BF}(|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) = 4\pi^2 N J_0^2(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|)$ 。

[0227] 还注意到, 对于 $\xi = \pi$ (即, 半圆) 并且 $\phi' = 0$ 或者 ϕ' 为 π 的倍数 (即焦点和沿着 (或者平行于) x 轴的场点) :

[0228]

$$\int_0^\pi d\phi_r \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})\} = \pi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|), \quad \phi' = 0, \text{ 或者 } \phi' = \pi \text{ 的倍数}$$

[0229] 因此, $h_{BF}(|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) = \pi^2 N J_0^2(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|)$, 对于 $\xi = \pi$ 并且 $\phi' = 0$ 或者 ϕ' 为 π 的倍数。

[0230] 现在计算 $h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r})$ 的二维傅里叶变换 $H_{BF}(\mathbf{k})$ 。

$$[0231] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r h_{BF}(\mathbf{z} - \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r e^{-i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]} \times$$

$$[0232] \quad N \left(\xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \{\sin(n\xi) \cos(n\phi') + [1 - \cos(n\xi)] \sin(n\phi')\} \right)^* \times \\ \left(\xi J_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} J_n(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \{\sin(n\xi) \cos(n\phi') + [1 - \cos(n\xi)] \sin(n\phi')\} \right)$$

[0233] 将 \mathbf{k} 的角度表示为 ϕ , $\alpha = \phi' - \phi$; $\mathbf{k} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}] = |\mathbf{k}| |\mathbf{z} - \mathbf{r}| \cos(\alpha)$, 现在再次使用 Jacobi-Anger 展开

$$[0234] \quad \exp\{-i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]\} = \exp\{-i|\mathbf{k}| |\mathbf{z} - \mathbf{r}| \cos(\alpha)\} =$$

$$[0235] \quad [J_0(|\mathbf{k}||z-r|) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n J_n(|\mathbf{k}||z-r|) \cos(n\alpha)]^*$$

$$[0236] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\phi'$$

$$[0237] \quad \left(J_0(|\mathbf{k}||z-r|) + 2 \sum_{n_3=1}^{\infty} i^{n_3} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) [\cos(n_3\phi) \cos(n_3\phi') + \sin(n_3\phi) \sin(n_3\phi')] \right)^*$$

$$[0238] \quad \times N \left(\xi J_0(k_0|z-r|) + 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{i^{n_2}}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) \{ \sin(n_2\xi) \cos(n_2\phi') + [1 - \cos(n_2\xi)] \sin(n_2\phi') \} \right)^*$$

$$[0239] \quad \times \left(\xi J_0(k_0|z-r|) + 2 \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{i^{n_1}}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) \{ \sin(n_1\xi) \cos(n_1\phi') + [1 - \cos(n_1\xi)] \sin(n_1\phi') \} \right)$$

[0240] 角 ϕ' 的积分是在 \sin 和 \cos 三角函数的简单积上进行的, 可以容易地算出。

[0241] 因此, 现在关注 3 个贝塞尔函数积的积分。在文献⁶中可以获得封闭形式的这种积分。例如:

$$[0242] \quad \int_0^{\infty} t^{1-n_1} J_{n_1}(at) J_{n_2}(bt) J_{n_2}(ct) dt = \frac{(bc)^{n_1-1} \sin^{n_1-\frac{1}{2}}(A)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} a^{n_1}} \frac{P^{\frac{1}{2}-n_1}(\cos A)}{n_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$[0243] \quad R(n_1) > -\frac{1}{2}, \quad R(n_2) > -\frac{1}{2}$$

[0244] -----

[0245] ⁶Y. L. Luke, Integrals of Bessel Functions, McGraw-Hill, New York, 1962, p. 331 and 332

[0246] 如果 a, b, c 是三角形区域 Δ 的边, 并且 A 是

[0247]

$$A = \begin{cases} 0, & a^2 < (b-c)^2 \text{ 且 } a^2 < (b+c)^2 \\ \arccos \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, & (b-c)^2 \leq a^2 \leq (b+c)^2 \\ \pi, & a^2 > (b-c)^2 \text{ 且 } a^2 > (b+c)^2 \end{cases}$$

$$[0248] \quad \Delta = \frac{1}{2} bc \sin(A), \quad \sin(A) = \frac{2\Delta}{bc}$$

[0249] P_{ν}^{μ} 是第一类勒让德函数⁷:

$$[0250] \quad P_{\lambda}^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{1+z}{1-z} \right]^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1 \left(-\lambda, \lambda+1, 1-\mu, \frac{1-z}{2} \right)$$

$$[0251] \quad {}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \text{ 只要 } c \text{ 不是 } 0, -1, -2, \dots, \text{ 并且}$$

$$[0252] \quad (a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1$$

[0253] 对于相同索引的全部三个贝塞尔函数的特殊情况:

$$[0254] \quad \int_0^{\infty} t^{1-n} J_n(at) J_n(bt) J_n(ct) dt = \frac{2^{n-1} \Delta^{2n-1}}{\pi(abc)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n} \Rightarrow \int_0^{\infty} t J_0(at) J_0(bt) J_0(ct) dt = \frac{1}{2\pi\Delta}$$

[0255] 对于我们的示例, $a=b=k_0, c=|k|$, 得到:

[0256]
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{k_0^2 + |\mathbf{k}|^2 - k_0^2}{2k_0|\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{2k_0}$$

[0257]
$$\sin(A) = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{4k_0^2}}$$
, 因此, $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin(A) = \frac{1}{2} k_0 |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{4k_0^2}}$ 并且

[0258]
$$\int_0^\infty t J_0(at) J_0(bt) J_0(ct) dt = \frac{1}{2\pi\Delta} = \frac{1}{\pi k_0 |\mathbf{k}| \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{4k_0^2}}} \tag{18}$$

[0259] 因此得到针对受限视场弧的 H_{BF} 的公式。在我们的示例中 a、b、c 之间的三角关系要求 $|\mathbf{k}| \leq 2k_0$, 因此得到低通滤波:

[0260]
$$H_{BF} = g(k) \Pi(|\mathbf{k}|), \text{ 其中 } \Pi(|\mathbf{k}|) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{k}| < 2k_0 \\ 0 & |\mathbf{k}| > 2k_0 \end{cases} \tag{19}$$

[0261] DT 问题包括从一组散射实验重构函数 $O(r)$ 。为此目的, 引入目标函数在空间频率域(K 空间) 中的表示形式是方便的, 其通过进行 $O(r)$ 的二维傅里叶变换而得到的。

[0262]
$$\tilde{O}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^\infty d^2r O(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{20}$$

[0263] -----

[0264] [7http://en.wiki edia.org/wiki/Leendre function;](http://en.wiki edia.org/wiki/Leendre_function)

[0265] [http://en.wikiedia.org/wiki/Hypergeometric function](http://en.wikiedia.org/wiki/Hypergeometric_function)[http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma function](http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function)

[0266] 我们下面考虑波束成形图像:

[0267]

$$\mathfrak{S}_{BF} = \int_{-\infty}^\infty dr_1 \int_{-\infty}^\infty dr_2 O(\mathbf{r}) h(|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \tag{21}$$

[0268] 其在空间频率域中为

[0269]
$$I_{BF}(\mathbf{k}) = \tilde{O}(\mathbf{k}) H_{BF}(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \tilde{O}(\mathbf{k}) \Pi(|\mathbf{k}|) \tag{22}$$

[0270] 尽管在整个圆上的 DT 产生低通滤波图像, $\tilde{O}(\mathbf{k}) \Pi(|\mathbf{k}|)$, 新 BF 算法引入了由附加滤波器 $g(\mathbf{k})$ 描述的失真。结果, 通过向 BF 图像应用滤波器 $\frac{1}{g(\mathbf{k})}$, 可以从 BF 图像获得 DT 图像。再次, 存在对其它 DT 算法⁸ 的替代方法。

[0271] -----

[0272] ⁸参见脚注 3

[0273] 附件 AI :积分 : $n_1=0, n_2$ 用于一般公式:

[0274]
$$\int_0^\infty t^{1-n_1} J_{n_1}(at) J_{n_2}(bt) J_{n_2}(ct) dt = \frac{(bc)^{n_1-1} \sin^{n_1-\frac{1}{2}}(A)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} a^{n_1}} P_{n_2-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-n_1}(\cos A)$$

[0275] 对于特殊情况, $n_1=n_2=n_3=0$, 其为:

$$[0276] \quad \int_0^{\infty} t^1 J_0(at) J_{n_2}(bt) J_{n_2}(ct) dt = \frac{(bc)^{-1} \sin^{\frac{1}{2}}(A)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} P_{n_2-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\cos A)$$

[0277] 对于我们的示例 $a=b=k_0$, $c=|k|$, 得到:

$$[0278] \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{k_0^2 + |k|^2 - k_0^2}{2k_0|k|} = \frac{|k|}{2k_0} = z$$

$$[0279] \quad \sin(A) = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - \frac{|k|^2}{4k_0^2}}. \text{ 因此, } \Delta = \frac{1}{2} bc \sin(A) = \frac{1}{2} k_0 |k| \sqrt{1 - \frac{|k|^2}{4k_0^2}}$$

$$[0280] \quad \sin^{\frac{1}{2}}(A) = (\sqrt{1 - z^2})^{\frac{1}{2}} = [(1+z)(1-z)]^{\frac{1}{4}}$$

$$[0281] \quad \int_0^{\infty} t J_0(k_0 t) J_{n_2}(k_0 t) J_{n_2}(|k|t) dt = \frac{1}{k_0 |k| (2\pi)^{\frac{1}{2}} [(1+z)(1-z)]^{\frac{1}{4}}} P_{n_2-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z)$$

[0282] 现在考虑勒让德函数的定义:

$$[0283] \quad P_{\lambda}^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left[\frac{1+z}{1-z} \right]^{\frac{\mu}{2}} {}_2F_1\left(-\lambda, \lambda+1, 1-\mu, \frac{1-z}{2}\right)$$

[0284] 使用 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, 对于 $\mu = \frac{1}{2}$ 和 $\lambda = n_2 - \frac{1}{2}$, 得到

$$[0285] \quad P_{n_2-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1+z}{1-z} \right]^{\frac{1}{4}} {}_2F_1\left(-n_2 + \frac{1}{2}, n_2 - \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$$

$$[0286] \quad \int_0^{\infty} t J_0(k_0 t) J_{n_2}(k_0 t) J_{n_2}(|k|t) dt$$

$$[0287] \quad = \frac{1}{k_0 |k| (2\pi)^{\frac{1}{2}} [(1+z)(1-z)]^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1+z}{1-z} \right]^{\frac{1}{4}} {}_2F_1\left(-n_2 + \frac{1}{2}, n_2 - \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$$

$$[0288] \quad = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} {}_2F_1\left(-n_2 + \frac{1}{2}, n_2 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$$

[0289] -----

[0290] 对于 $n_2=0$, 在 ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$ 中得到高斯超几何函数

$$[0291] \quad {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}; \Rightarrow {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-z}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-(1-z)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z}}$$

[0292] -----

[0293] ⁹<http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/03/07/07/01//8>

$$[0294] \quad \int_0^{\infty} t J_0(k_0 t) J_0(k_0 t) J_0(|k|t) dt = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z}}$$

$$[0295] \quad = \frac{1}{k_0 |k| \pi \sqrt{1-z}} \frac{1}{\sqrt{1+z}} = \frac{1}{k_0 |k| \pi \sqrt{[(1-z^2)]}} = \frac{1}{k_0 |k| \pi \sqrt{1 - \frac{|k|^2}{4k_0^2}}}$$

[0296] 使用了 $z = \frac{|k|}{2k_0}$.

[0297] -----

[0298] $n_2=1$

[0299] 以上的高斯超几何函数是 ${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1-2z}{\sqrt{1-z}}$

$$[0300] \quad {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; y\right) = \frac{1-2y}{\sqrt{1-y}}; \Rightarrow {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{z}{\sqrt{1-\frac{1-z}{2}}} = \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{2-(1-z)}} = \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1+z}}$$

$$[0301] \quad \int_0^{\infty} t J_0(k_0 t) J_1(k_0 t) J_1(|k|t) dt$$

$$[0302] \quad = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1+z}}$$

$$[0303] \quad = \frac{z}{k_0 |k| \pi \sqrt{1-z^2}} = \frac{\frac{|k|}{2k_0}}{k_0 |k| \pi \sqrt{1-\frac{|k|^2}{4k_0^2}}} = \frac{1}{2k_0^2 \pi \sqrt{1-\frac{|k|^2}{4k_0^2}}}$$

[0304] 使用 $z = \frac{|k|}{2k_0}$.

[0305] -----

[0306] $n_2=2$ 以上的高斯超几何函数是 ${}_2F_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{8(z-1)z+1}{\sqrt{1-z}}$

$$[0307] \quad {}_2F_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}; y\right) = \frac{8(y-1)y+1}{\sqrt{1-y}}; \Rightarrow {}_2F_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) = \frac{8\left(\frac{1-z}{2}-1\right)\frac{1-z}{2}+1}{\sqrt{1-\frac{1-z}{2}}}$$

$$[0308] \quad = \frac{-2(z+1)(1-z)+1}{\sqrt{1-\frac{1-z}{2}}} = \frac{\sqrt{2}[1-2(z+1)(1-z)]}{\sqrt{1+z}} = \frac{\sqrt{2}[1+2(z^2-1)]}{\sqrt{1+z}}$$

$$[0309] \quad = \frac{\sqrt{2}(2z^2-1)}{\sqrt{1+z}}$$

$$[0310] \quad \int_0^{\infty} t J_0(k_0 t) J_2(k_0 t) J_2(|k|t) dt = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} {}_2F_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$$

$$[0311] \quad = \frac{1}{k_0 |k| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} \frac{\sqrt{2}(2z^2-1)}{\sqrt{1+z}} = \frac{2z^2-1}{k_0 |k| \pi \sqrt{1-z^2}} = \frac{2z^2-1}{k_0 |k| \pi \sqrt{1-z^2}}$$

$$[0312] \quad = \frac{\frac{|k|^2}{2k_0^2}-1}{k_0 |k| \pi \sqrt{1-\frac{|k|^2}{4k_0^2}}}$$

[0313] 使用了 $z = \frac{|k|}{2k_0}$.

[0314] -----

[0315] $n_2=3$

[0316] 以上的高斯超几何函数是 ${}_2F_1\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1-2(3-4z)^2 z}{\sqrt{1-z}}$

$$[0317] \quad {}_2F_1\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}; y\right) = \frac{1-2(3-4y)^2 y}{\sqrt{1-y}} \Rightarrow {}_2F_1\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) = \frac{1-2\left(3-4\frac{1-z}{2}\right)^2 \frac{1-z}{2}}{\sqrt{1-\frac{1-z}{2}}} =$$

$$[0318] \quad = \frac{\sqrt{2}(1-(1+2z)^2(1-z))}{\sqrt{1+z}}$$

[0319] 得到：

$$[0320] \quad \int_0^\infty t J_0(k_0 t) J_3(k_0 t) J_3(|\mathbf{k}| t) dt = \frac{1}{k_0 |\mathbf{k}| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} {}_2F_1\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right)$$

$$[0321] \quad = \frac{1}{k_0 |\mathbf{k}| \sqrt{2\pi} \sqrt{1-z}} \frac{\sqrt{2}(1-(1+2z)^2(1-z))}{\sqrt{1+z}}$$

$$[0322] \quad = \frac{1-(1+2z)^2(1-z)}{k_0 |\mathbf{k}| \pi \sqrt{1-z^2}}$$

$$[0323] \quad = \frac{1-\left(1+\frac{|\mathbf{k}|}{k_0}\right)^2 \left(1-\frac{|\mathbf{k}|}{2k_0}\right)}{k_0 |\mathbf{k}| \pi \sqrt{1-\frac{|\mathbf{k}|^2}{4k_0^2}}}$$

[0324] 使用了 $z = \frac{|\mathbf{k}|}{2k_0}$.

[0325] 附件 A II : 进行积分以获得 $H_{BF}(\mathbf{k})$

$$[0326] \quad h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r}) = N \int_0^\xi d\phi_r \int_0^\xi d\phi_t \times$$

$$[0327] \quad \exp\{-ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{r})\} \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_t) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{r})\}$$

[0328] 贝塞尔函数¹⁰和 Jacobi Anger 展开¹¹：

$$[0329] \quad \langle \mathbf{r}-\mathbf{z} | \mathbf{k}_0 \rangle = \exp[\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{z})] = \exp\{ik_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}| \cos(\alpha)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp(in\alpha)$$

$$[0330] \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp\left[in\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$[0331] \quad = J_0(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp\left[in\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

[0332] $\alpha = \phi_{r,t} - \phi'$ • 在 ϕ_r 上积分：

$$[0333] \quad \int_0^\xi d\phi_r \exp\{-ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_r) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{r})\}$$

$$[0334] \quad = \xi J_0(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \int_0^\xi d\phi_r \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp\left[-in\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$[0335] \quad = \xi J_0(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \int_0^\xi d\phi_r \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0 |\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp\left[-in\left(\phi_r - \phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$[0336] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \int_0^\xi d\phi_r \exp\left[-in\left(\phi_r - \phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$[0337] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \exp\left[-in\left(-\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right] J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \int_0^\xi d\phi_r \exp[-in\phi_r]$$

$$[0338] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} e^{in\left(\phi' - \frac{\pi}{2}\right)} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{e^{-in\xi} - 1}{-ne^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$[0339] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n)\frac{\pi}{2}}[e^{-in\xi} - 1]}{-n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in\phi'}$$

[0340] 在 ϕ_t 上积分：

$$[0341] \quad \int_0^\xi d\phi_t \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\phi_t) \cdot (\mathbf{z}-\mathbf{r})\} = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \int_0^\xi d\phi_t \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp\left[in\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$[0342] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \int_0^\xi d\phi_t \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \exp\left[in\left(\phi_t - \phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

[0343] -----

[0344] ¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

[0345] ¹¹http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi-Anger_expansion

$$[0346] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \int_0^\xi d\phi_t \exp\left[in\left(\phi_t - \phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$[0347] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \exp\left[in\left(-\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right] J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \int_0^\xi d\phi_t \exp[in\phi_t]$$

$$[0348] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} e^{in\left(-\phi' + \frac{\pi}{2}\right)} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{e^{in\xi} - 1}{in}$$

$$[0349] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} e^{in\left(-\phi' + \frac{\pi}{2}\right)} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{e^{in\xi} - 1}{in} i$$

$$[0350] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{in\left(-\phi' + \frac{\pi}{2}\right)} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{e^{in\xi} - 1}{-n}$$

$$[0351] \quad = \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{e^{i(1+n)\frac{\pi}{2}}[e^{in\xi} - 1]}{-n} e^{-in\phi'}$$

[0352] 实际上上述在 ϕ_t 上的积分是在 ϕ_r 上的积分的复共轭。

[0353]

⇒

$$[0354] \quad h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r}) =$$

$$[0355] \quad N \left\{ \xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}}[1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_2\phi'} \right\}$$

$$[0356] \quad \left\{ \xi J_0(k_0|z-r|) + \sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} \right\}$$

[0357] 傅里叶变换：

$$[0358] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} = \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \times$$

$$[0359] \quad \times N \left\{ \xi J_0(k_0|z-r|) + \sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'} \right\}$$

$$[0360] \quad \left\{ \xi J_0(k_0|z-r|) + \sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} \right\}$$

$$[0361] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} = \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \times$$

$$[0362] \quad \times N \{ \xi^2 J_0(k_0|z-r|) J_0(k_0|z-r|) +$$

$$[0363] \quad \xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'} +$$

$$[0364] \quad \xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} +$$

$$[0365] \quad + \left[\sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'} \right] \times$$

$$[0366] \quad \left[\sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} \right]$$

$$[0367] \quad \equiv \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_0 + L_1 + L_2 + L_3\}$$

[0368] 为了方便,上述表达式用中间项标记。

[0369] 在两个步骤中检查 L_1 总和：

$$[0370] \quad \sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'}$$

$$[0371] \quad = \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'}$$

$$[0372] \quad + \sum_{n_2=-\infty}^{-1} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'} =$$

$$[0373] \quad = \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'}$$

$$[0374] \quad + \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1-n_2)\frac{\pi}{2}} [e^{in_2\xi} - 1]}{n_2} J_{-n_2}(k_0|z-r|) e^{-in_2\phi'}$$

$$[0375] \quad = \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'} + \frac{e^{-i(1-n_2)\frac{\pi}{2}} [e^{in_2\xi} - 1]}{n_2} J_{-n_2}(k_0|z-r|) e^{-in_2\phi'}$$

[0376] 使用: $J_{-n_2}(k_0|z-r|) = (-1)^{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|)$, 得到:

$$[0377] \quad = \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'}$$

$$[0378] \quad + \frac{e^{-i(1-n_2)\frac{\pi}{2}} [e^{in_2\xi} - 1]}{n_2} (-1)^{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{-in_2\phi'}$$

$$[0379] \quad L_1 = N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2} e^{-i\frac{\pi}{2}} J_{n_2}(k_0|z-r|) \left\{ e^{-in_2\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}] e^{in_2\phi'} \right.$$

$$[0380] \quad \left. + e^{in_2\frac{\pi}{2}} [e^{in_2\xi} - 1] (-1)^{n_2} e^{-in_2\phi'} \right\}$$

[0381] 类似地在两个步骤针对 n_1 上的总和检查 L_2 :

$$[0382] \quad \sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} =$$

$$[0383] \quad = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'}$$

$$[0384] \quad + \sum_{n_1=-\infty}^{-1} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'}$$

$$[0385] \quad = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'}$$

$$[0386] \quad + \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1-n_1)\frac{\pi}{2}} [e^{-in_1\xi} - 1]}{n_1} J_{-n_1}(k_0|z-r|) e^{in_1\phi'} = *$$

[0387] 使用 $J_{-n_1}(k_0|z-r|) = (-1)^{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|)$

$$[0388] \quad * = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'}$$

$$[0389] \quad + \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1-n_1)\frac{\pi}{2}} [e^{-in_1\xi} - 1] (-1)^{n_1}}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{in_1\phi'}$$

$$[0390] \quad L_2 = N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) \left\{ e^{in_1\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}] e^{-in_1\phi'} \right.$$

$$[0391] \quad \left. + e^{-in_1\frac{\pi}{2}} [e^{-in_1\xi} - 1] (-1)^{n_1} e^{in_1\phi'} \right\}$$

[0392] 其为 L_1 的复共轭, 因为 L_1 应该是

$$[0393] \quad L_1 = N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) \left\{ e^{-in_2\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}] e^{in_2\phi'} \right.$$

$$[0394] \quad \left. + e^{in_2\frac{\pi}{2}} [e^{in_2\xi} - 1] (-1)^{n_2} e^{-in_2\phi'} \right\}$$

[0395] 针对 n_1 和 n_2 将该两项相加, 即, (L_1+L_2) , 并且用 n 标记索引:

$$[0396] \quad N\xi J_0(k_0|z-r|) \times \{$$

$$[0397] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) \left\{ e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] e^{in\phi'} + e^{in\frac{\pi}{2}} [e^{in\xi} - 1] (-1)^n e^{-in\phi'} \right\}$$

$$[0398] \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) \left\{ e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] e^{-in\phi'} + e^{-in\frac{\pi}{2}} [e^{-in\xi} - 1] (-1)^n e^{in\phi'} \right\}$$

$$[0399] \quad \}$$

[0400] 重新排列分别乘以 $e^{-in\phi'}$ 和 $e^{in\phi'}$ 的项, 得到:

$$[0401] \quad = N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] \right.$$

$$[0402] \quad \left. - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{in\frac{\pi}{2}} J_n(k_0|z-r|) [1 - e^{in\xi}] (-1)^n \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0403] \quad + N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right.$$

$$[0404] \quad \left. - \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in\frac{\pi}{2}} J_n(k_0|z-r|) [1 - e^{-in\xi}] (-1)^n \right\} e^{in\phi'}$$

[0405] 现在检查上面的项:

$$[0406] \quad \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{in\frac{\pi}{2}} J_n(k_0|z-r|) [1 - e^{in\xi}] (-1)^n \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0407] \quad = \left\{ \frac{1}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] \left[e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} (-1)^n \right] \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0408] \quad = \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] [1 + (-1)^n] \right\} e^{-in\phi'}$$

[0409] 类似地, 对于下面的项:

$$[0410] \quad \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] - \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in\frac{\pi}{2}} J_n(k_0|z-r|) [1 - e^{-in\xi}] (-1)^n \right\} e^{in\phi'}$$

$$[0411] \quad = \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] [1 + (-1)^n] \right\} e^{in\phi'}$$

[0412] 这验证了通过将 L_1 和 L_2 相加, 仅仅偶数项对总和有贡献。

$$[0413] \quad L_1 + L_2 = N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] [1 + (-1)^n] \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0414] \quad + \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] [1 + (-1)^n] \right\} e^{in\phi'} =$$

$$[0415] \quad = 2N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0416] \quad + \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} e^{in\phi'}$$

[0417] 现在傅里叶变换

$$[0418] \quad \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} (L_1 + L_2) =$$

$$[0419] \quad = \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \times 2N\xi J_0(k_0|z-r|) \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0420] \quad + \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} e^{in\phi'}$$

$$[0421] \quad \exp\{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]\} = \exp\{-i|\mathbf{k}||z-r| \cos(\alpha)\} = \left[\sum_{n_3=-\infty}^{\infty} i^{n_3} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp(in_3\alpha) \right]^* =$$

$$[0422] \quad = \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} i^{-n_3} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp(-in_3\alpha) =$$

$$[0423] \quad = \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(-in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$[0424] \quad = J_0(|\mathbf{k}||z-r|) + \sum_{n_3=1}^{\infty} e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(-in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$+ \sum_{n_3=-\infty}^{-1} e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(-in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$[0425] \quad = J_0(|\mathbf{k}||z-r|) + \sum_{n_3=1}^{\infty} e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(-in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$+ \sum_{n_3=1}^{\infty} e^{-in_3\phi} J_{-n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right) = *$$

$$[0426] \quad J_{-n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) = (-1)^{n_3} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|)$$

$$[0427] \quad * = J_0(|\mathbf{k}||z-r|) + \sum_{n_3=1}^{\infty} e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(-in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$[0428] \quad + \sum_{n_3=1}^{\infty} e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) \exp\left(in_3\left(\phi' + \frac{\pi}{2}\right)\right) (-1)^{n_3} =$$

[0429] 为了紧凑记法, 标记 F :

$$[0430] \quad F = J_0(|\mathbf{k}||z-r|)$$

$$[0431] \quad + \sum_{n_3=1}^{\infty} \left\{ e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} \right.$$

$$[0432] \quad \left. + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \right\}$$

[0433]

\Rightarrow

$$[0434] \quad \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} (L_1 + L_2) = \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' (L_1 + L_2) F$$

$$[0435] \quad = \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' \times 2N\xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] \right\} e^{-in\phi'}$$

$$[0436] \quad + \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} e^{in\phi'} \times$$

$$[0437] \quad \left\{ J_0(|\mathbf{k}||z-r|) + \sum_{n_3=1}^{\infty} \left[e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \right] \right\}$$

[0438] 注意到：

$$[0439] \quad \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in\phi'} = \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in\phi'} = 0$$

$$[0440] \quad \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in\phi'} e^{in_3\phi'} = \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in\phi'} e^{-in_3\phi'} = 0$$

$$[0441] \quad \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in\phi'} e^{-in_3\phi'} = \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in\phi'} e^{in_3\phi'} = 2\pi\delta_{n,n_3}$$

[0442] 因此,剩下的项仅仅是：

$$[0443] \quad \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' (L_1 + L_2) F = \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \times 2N\xi J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \times \{$$

$$[0444] \quad \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} \left\{ \sum_{n_3=1}^{\infty} \left[e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} \right] \right\} 2\pi\delta_{n,n_3}$$

[0445]

$$+ \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] \right\} \left\{ \sum_{n_3=1}^{\infty} \left[e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} \right] \right\} 2\pi\delta_{n,n_3}$$

$$[0446] \quad = 4\pi N\xi \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|)$$

$$[0447] \quad \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}] \right\} \left[e^{in\phi} J_n(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$[0448] \quad + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}] \left[e^{-in\phi} J_n(|\mathbf{k}||z-r|) e^{in\frac{\pi}{2}} \right]$$

[0449] 注意到上述两个项是彼此的复共轭,因此根据脚注¹²

$$[0450] \int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r})(L_1+L_2)F=4\pi N\xi \int_0^\infty |\mathbf{z}-\mathbf{r}|d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \times$$

$$[0451] \sum_{n=1,even}^\infty 2\text{Re} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} J_n(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in\frac{\pi}{2}} [1-e^{-in\xi}] \left[e^{in\phi} J_n(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in\frac{\pi}{2}} \right] \right\}$$

$$[0452] =4\pi N\xi \sum_{n=1,even}^\infty 2\text{Re} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in\frac{\pi}{2}} [1-e^{-in\xi}] e^{in\phi} e^{-in\frac{\pi}{2}} \right\} I_{0,n,n} =*$$

$$[0453] \text{-----}^{12}C=A+iB; c+c^*=2A=2\text{Re}(C)$$

[0454] 检查:

$$[0455] \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in\frac{\pi}{2}} [1-e^{-in\xi}] e^{in\phi} e^{-in\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in\pi} [1-e^{-in\xi}] e^{in\phi}$$

$$[0456] = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in\pi} e^{in\phi} - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} e^{-in(\pi+\xi)} e^{in\phi}$$

$$[0457] = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} [e^{i(n\phi-n\pi)} - e^{i(n\phi-n\pi-n\xi)}]$$

$$[0458] = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} [\cos(n\phi-n\pi) + i \sin(n\phi-n\pi) - \cos(n\phi-n\pi-n\xi)$$

$$[0459] - i \sin(n\phi-n\pi-n\xi)]$$

[0460] 取实数部分(注意 $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$):

$$[0461] \text{Re} \left\{ \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{n} [\cos(n\phi-n\pi) + i \sin(n\phi-n\pi) - \cos(n\phi-n\pi-n\xi) - i \sin(n\phi-n\pi-n\xi)] \right\}$$

$$[0462] = \frac{1}{n} \text{Re} \{-i \cos(n\phi-n\pi) + \sin(n\phi-n\pi) + i \cos(n\phi-n\pi-n\xi) - \sin(n\phi-n\pi-n\xi)\}$$

$$[0463] = \frac{1}{n} \{\sin(n\phi-n\pi) - \sin(n\phi-n\pi-n\xi)\}$$

[0464] 最终得到:

[0465]

$$\int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_1+L_2\} = 8\pi N\xi \sum_{n=1,even}^\infty \frac{1}{n} [\sin(n\phi-n\pi) - \sin(n\phi-n\pi-n\xi)] I_{0,n,n}$$

[0466] 使用脚注¹³中的恒等式

[0467]

$$\int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_1+L_2\} = 8\pi N\xi \sum_{n=1,even}^\infty \frac{1}{n} [\sin(n\phi) - \sin(n\phi-n\xi)] I_{0,n,n}$$

[0468] 对于 $\xi = \pi$, 得到:

$$[0469] \sin(n(\pi-\phi)) = -\sin(n\phi-n\pi)$$

$$[0470] \sin(n\phi-n\pi) = \sin(n\phi); n=\text{even}$$

[0471]

⇒

[0472]
$$\int_{\xi=\pi} d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_1 + L_2\} = 8\pi N \xi \sum_{\substack{n=1 \\ \text{even}}}^{\infty} \frac{1}{n} [\sin(n\phi) - \sin(n\phi)] I_{0,n,n} = 0$$

[0473] 下面考虑 : $\int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_0\}$

[0474] _____

[0475] $^{13} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \Leftrightarrow$

[0476] $\sin(a-n\pi) = \sin a \cos n\pi - \cos a \sin n\pi = \sin a; \text{ for } n = \text{even}$

[0477] http://en.wikipedia.org/wiki/Angle_addition_formula#Angle_sum_and_difference_identities

[0478]
$$\int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_0\} = \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' L_0 F$$

[0479] 其中,和之前相同

[0480]
$$F = J_0(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{n_3=1}^{\infty} \{ e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \}$$

[0481] $+ e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \}$

[0482] 并且 $L_0 = N \{ \xi^2 J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \}$ • 得到

[0483]
$$\int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' L_0 F = \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' N \{ \xi^2 J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) J_0(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \int_0^{\infty} d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' N \{ \xi^2 J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \times$$

[0484] $+ \int_0^{\infty} d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' N \{ \xi^2 J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \times$

[0485] $\sum_{n_3=1}^{\infty} \{ e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \}$

[0486]

=

[0487]
$$= 2\pi N \xi^2 I_{0,0,0} + \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' N \{ \xi^2 J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) J_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \times$$

[0488] $\sum_{n_3=1}^{\infty} \{ e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \}$

[0489]
$$\int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' L_0 F = 2\pi N \xi^2 I_{0,0,0}; \text{ as } \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in_3\phi'} = 0$$

[0490] 最后考虑 : $\int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_3\}$

[0491]
$$\int d^2(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \{L_3\} = \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' L_3 F$$

[0492] $F = j_0(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|)$

$$[0493] \quad + \sum_{n_3=1}^{\infty} \left\{ e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} \right.$$

$$[0494] \quad \left. + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \right\}$$

$$[0495] \quad L_3 = N \left[\sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_2\phi'} \right] \times$$

$$[0496] \quad \left[\sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_1\phi'} \right]$$

[0497] 如同之前,我们将总和划分为两个部分:

$$[0498] \quad L_3 = N \times \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_2\phi'} \right.$$

$$[0499] \quad \left. + \sum_{n_2=-\infty}^{-1} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_2\phi'} \right] \times$$

$$[0500] \quad \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_1\phi'} + \sum_{n_1=-\infty}^{-1} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_1\phi'} \right]$$

[0501] 再次使用:

$$[0502] \quad J_{-n}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) = (-1)^n J_n(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|)$$

[0503] 得到:

$$[0504] \quad L_3 = N \times \left[\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{in_2\phi'} \right.$$

$$[0505] \quad \left. + \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{e^{-i(1-n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_2\xi}]}{-n_2} J_{n_2}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) (-1)^{n_2} e^{-in_2\phi'} \right] \times$$

$$[0506] \quad \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) e^{-in_1\phi'} \right.$$

$$[0507] \quad \left. + \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{e^{i(1-n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_1\xi}]}{-n_1} J_{n_1}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) (-1)^{n_1} e^{in_1\phi'} \right]$$

[0508] 首先考虑:

$$[0509] \quad \int_0^{\infty} |\mathbf{z}-\mathbf{r}| d|\mathbf{z}-\mathbf{r}| \int_0^{2\pi} d\phi' L_3 J_0(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|)$$

[0510] 回顾:

$$[0511] \quad \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in\phi'} = \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in\phi'} = 0$$

$$[0512] \quad \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in_1\phi'} e^{in_2\phi'} = \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in_1\phi'} e^{-in_2\phi'} = 0$$

$$[0513] \quad \int_0^{2\pi} d\phi' e^{in_1\phi'} e^{-in_2\phi'} = \int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in_1\phi'} e^{in_2\phi'} = 2\pi\delta_{n_1, n_2}$$

[0514] 剩下的项仅仅是：

$$[0515] \quad \int_0^\infty |z-r|d|z-r| \int_0^{2\pi} d\phi' L_3 J_0(|\mathbf{k}||z-r|) = \int_0^\infty |z-r|d|z-r| \int_0^{2\pi} d\phi' J_0(|\mathbf{k}||z-r|)N$$

$$[0516] \quad \times \sum_{n_1, n_2=1}^\infty \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'}$$

$$[0517] \quad \times \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} + \sum_{n_1, n_2=1}^\infty \frac{e^{-i(1-n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_2\xi}]}{-n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) (-1)^{n_2} e^{-in_2\phi'}$$

$$[0518] \quad \times \frac{e^{i(1-n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_1\xi}]}{-n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) (-1)^{n_1} e^{in_1\phi'}$$

$$[0519] \quad = 2\pi N \int_0^\infty |z-r|d|z-r| J_0(|\mathbf{k}||z-r|) \times$$

$$[0520] \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-i(1+n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}]}{n} J_n(k_0|z-r|) \times \frac{e^{i(1+n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}]}{n} J_n(k_0|z-r|)$$

$$[0521] \quad + \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-i(1-n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}]}{-n} J_n(k_0|z-r|) (-1)^n$$

$$[0522] \quad \times \frac{e^{i(1-n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}]}{-n} J_n(k_0|z-r|) (-1)^n$$

$$[0523] \quad I_{n_1, n_2, n_3} = I_{n_1, n_2, n_3}(k_0, |\mathbf{k}|) = \int_0^\infty |z-r|d|z-r| J_{n_1}(k_0|z-r|) J_{n_2}(k_0|z-r|) J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|)$$

[0524]

$$= 2\pi N \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{e^{-i(1+n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}]}{n} \frac{e^{i(1+n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}]}{n} + \frac{e^{-i(1-n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in\xi}]}{-n} \frac{e^{i(1-n)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in\xi}]}{-n} I_{n, n, 0} \right]$$

$$[0525] \quad = 2\pi N \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{[1 - e^{-in\xi}][1 - e^{in\xi}]}{n^2} + \frac{[1 - e^{in\xi}][1 - e^{-in\xi}]}{-n^2} I_{n, n, 0} \right] =$$

$$[0526] \quad = 2\pi N \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^2} [1 - e^{-in\xi}][1 - e^{in\xi}] I_{0, n, n} =$$

[0527]

$$[1 - e^{-in\xi}][1 - e^{in\xi}] = 2 - e^{-in\xi} - e^{in\xi} = 2 - \cos(-n\xi) - i \sin(-n\xi) - \cos(n\xi) - i \sin(n\xi)$$

$$[0528] \quad = -2[1 - \cos(n\xi)]$$

$$[0529] \quad \int_0^\infty |z-r|d|z-r| \int_0^{2\pi} d\phi' L_3 J_0(|\mathbf{k}||z-r|) = 8\pi N \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} [1 - \cos(n\xi)] I_{n, n, 0}$$

[0530] 对于 $\xi = \pi$ 的情况, 得到

[0531]
$$8\pi N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] I_{0,n,n} = 16\pi N \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n^2} I_{n,n,0}$$

[0532] 其次考虑 F 的第二项的贡献：

[0533]
$$\int_0^{\infty} |z-r|d|z-r| \int_0^{2\pi} d\phi' L_3 \sum_{n_3=1}^{\infty} \{ e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} + e^{-in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{in_3\frac{\pi}{2}} (-1)^{n_3} e^{in_3\phi'} \}$$

[0534]
$$E = \int_0^{\infty} |z-r|d|z-r| \int_0^{2\pi} d\phi' N \times$$

[0535]
$$\left[\sum_{n_3=-\infty, n_3 \neq 0}^{\infty} e^{in_3\phi} J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in_3\frac{\pi}{2}} e^{-in_3\phi'} \right]$$

[0536]
$$\left[\sum_{n_2=-\infty, n_2 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{-i(1+n_2)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_2} J_{n_2}(k_0|z-r|) e^{in_2\phi'} \right]$$

[0537]
$$\left[\sum_{n_1=-\infty, n_1 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(1+n_1)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}]}{n_1} J_{n_1}(k_0|z-r|) e^{-in_1\phi'} \right]$$

[0538]
$$E = \int_0^{\infty} |z-r|d|z-r| \int_0^{2\pi} d\phi' N \times$$

[0539]

$$\sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty, n_1, n_2, n_3 \neq 0}^{\infty} \frac{e^{i(n_1-n_2-n_3)\frac{\pi}{2}} [1 - e^{in_1\xi}] [1 - e^{-in_2\xi}]}{n_1 n_2} e^{in_3\phi} J_{n_1}(k_0|z-r|) J_{n_2}(k_0|z-r|) J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|) e^{-in_1\phi'} e^{in_2\phi'} e^{-in_3\phi'}$$

[0540] 定义并且标记：

[0541]

$$M_{n_1, n_2, n_3} = M_{n_1, n_2, n_3}(\xi, \phi) = \frac{e^{i(n_1-n_2-n_3)\frac{\pi}{2}}}{n_1 n_2} [1 - e^{in_1\xi} - e^{-in_2\xi} + e^{i(n_1-n_2)\xi}] e^{in_3\phi}$$

$$I_{n_1, n_2, n_3} = I_{n_1, n_2, n_3}(k_0, |\mathbf{k}|) = \int_0^{\infty} |z-r|d|z-r| J_{n_1}(k_0|z-r|) J_{n_2}(k_0|z-r|) J_{n_3}(|\mathbf{k}||z-r|)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi' e^{-in_1\phi'} e^{in_2\phi'} e^{-in_3\phi'} = 2\pi \delta_{-n_1+n_2, n_3}$$

$$E = 2\pi N \times \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty, n_1, n_2, n_3 \neq 0}^{\infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3}$$

[0542] 现在将总和划分为多个部分：

[0543] $E = 2\pi N$

$$[0544] \quad \times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n_1=1, n_2=1, n_3=1}^{\infty, \infty, \infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1=-\infty, n_2=1, n_3=1}^{-1, \infty, \infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} \\ & + \sum_{n_1=1, n_2=-\infty, n_3=1}^{\infty, -1, \infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1=1, n_2=1, n_3=-\infty}^{\infty, \infty, -1} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} \\ & + \sum_{n_1=-\infty, n_2=-\infty, n_3=1}^{-1, -1, \infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1=1, n_2=-\infty, n_3=-\infty}^{\infty, -1, -1} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} \\ & + \sum_{n_1=-\infty, n_2=1, n_3=-\infty}^{-1, \infty, -1} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1=-\infty, n_2=-\infty, n_3=-\infty}^{-1, -1, -1} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} \end{aligned} \right.$$

[0545] 将总和改变为“1 到∞”并且将对应的 n 索引改变为 -n:

[0546] $E = 2 \pi N$

[0547]

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, n_2, n_3} I_{-n_1, n_2, n_3} \delta_{n_1+n_2, n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, -n_2, n_3} I_{n_1, -n_2, n_3} \delta_{-n_1-n_2, n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, n_2, -n_3} I_{n_1, n_2, -n_3} \delta_{-n_1+n_2, -n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, -n_2, n_3} I_{-n_1, -n_2, n_3} \delta_{n_1-n_2, n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, -n_2, -n_3} I_{n_1, -n_2, -n_3} \delta_{-n_1-n_2, -n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, n_2, -n_3} I_{-n_1, n_2, -n_3} \delta_{n_1+n_2, -n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, -n_2, -n_3} I_{-n_1, -n_2, -n_3} \delta_{n_1-n_2, -n_3} \end{aligned} \right.$$

[0548] 将项重新排列:

[0549] $E=2 \pi N$

$$[0550] \quad \times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} \delta_{-n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, -n_2, -n_3} I_{-n_1, -n_2, -n_3} \delta_{n_1-n_2, -n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, -n_2, n_3} I_{-n_1, -n_2, n_3} \delta_{n_1-n_2, n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, n_2, -n_3} I_{n_1, n_2, -n_3} \delta_{-n_1+n_2, -n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{-n_1, n_2, n_3} I_{-n_1, n_2, n_3} \delta_{n_1+n_2, n_3} + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} M_{n_1, -n_2, -n_3} I_{n_1, -n_2, -n_3} \delta_{-n_1-n_2, -n_3} \end{aligned} \right.$$

[0551] 注意到 $\delta_{n, n}$ 的属性:

$$[0552] \quad E = 2\pi N \times \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} [M_{n_1, n_2, n_3} I_{n_1, n_2, n_3} + M_{-n_1, -n_2, -n_3} I_{-n_1, -n_2, -n_3}] \delta_{-n_1+n_2, n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} [M_{-n_1, -n_2, n_3} I_{-n_1, -n_2, n_3} + M_{n_1, n_2, -n_3} I_{n_1, n_2, -n_3}] \delta_{n_1-n_2, n_3} \\ & + \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{\infty} [M_{-n_1, n_2, n_3} I_{-n_1, n_2, n_3} + M_{n_1, -n_2, -n_3} I_{n_1, -n_2, -n_3}] \delta_{n_1+n_2, n_3} \end{aligned} \right.$$

[0553] 使用 δ :

$$[0554] \quad E = 2\pi N \times \begin{cases} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3=1 \\ -n_1+n_2 \geq 1}}^{\infty} [M_{n_1, n_2, -n_1+n_2} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} + M_{-n_1, -n_2, n_1-n_2} I_{-n_1, -n_2, n_1-n_2}] \\ + \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ n_1-n_2 \geq 1}}^{\infty} [M_{-n_1, -n_2, n_1-n_2} I_{-n_1, -n_2, n_1-n_2} + M_{n_1, n_2, -n_1+n_2} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2}] \\ + \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [M_{-n_1, n_2, n_1+n_2} I_{-n_1, n_2, n_1+n_2} + M_{n_1, -n_2, -n_1-n_2} I_{n_1, -n_2, -n_1-n_2}] \end{cases}$$

[0555] 集合 $-n_1+n_2 \geq 1$ 和 $n_1-n_2 \geq 1$ 的项, 得到

$$[0556] \quad E = 2\pi N \times \begin{cases} \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ n_2-n_1 \neq 0}}^{\infty} [M_{n_1, n_2, -n_1+n_2} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} + M_{-n_1, -n_2, n_1-n_2} I_{-n_1, -n_2, n_1-n_2}] \\ + \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [M_{-n_1, n_2, n_1+n_2} I_{-n_1, n_2, n_1+n_2} + M_{n_1, -n_2, -n_1-n_2} I_{n_1, -n_2, -n_1-n_2}] \end{cases}$$

[0557] 从 M_{n_1, n_2, n_3} 的显式表达式, 我们发现:

$$[0558] \quad E = 2\pi N \times \begin{cases} \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ n_2-n_1 \neq 0}}^{\infty} [M_{n_1, n_2, -n_1+n_2} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} + M_{-n_1, -n_2, n_1-n_2}^* I_{-n_1, -n_2, n_1-n_2}] \\ + \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [M_{-n_1, n_2, n_1+n_2} I_{-n_1, n_2, n_1+n_2} + M_{n_1, -n_2, -n_1-n_2}^* I_{n_1, -n_2, -n_1-n_2}] \end{cases}$$

[0559] 从属性 I_{n_1, n_2, n_3} :

$$[0560] \quad I_{-n_1, -n_2, n_1-n_2} = (-1)^{n_1} (-1)^{n_2} (-1)^{-n_1+n_2} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} = I_{n_1, n_2, -n_1+n_2}$$

$$[0561] \quad I_{n_1, -n_2, -n_1-n_2} = (-1)^{n_2} (-1)^{-n_1+n_2} I_{n_1, n_2, n_1+n_2} = (-1)^{n_1} I_{n_1, n_2, n_1+n_2} i I_{-n_1, n_2, n_1+n_2} = (-1)^{n_1} I_{n_1, n_2, n_1+n_2}$$

$$[0562] \quad E = 2\pi N \times \left\{ \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ n_2-n_1 \neq 0}}^{\infty} [2\operatorname{Re} M_{n_1, n_2, -n_1+n_2}] I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} + \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} (-1)^{n_1} [2\operatorname{Re} M_{-n_1, n_2, n_1+n_2}] I_{n_1, n_2, n_1+n_2} \right\}$$

[0563] 回顾针对以下的表达式

$$[0564] \quad M_{n_1, n_2, n_3} = \frac{e^{i(n_1-n_2-n_3)\frac{\pi}{2}}}{n_1 n_2} [1 - e^{in_1\xi} - e^{-in_2\xi} + e^{i(n_1-n_2)\xi}] e^{in_3\phi}$$

$$[0565] \quad M_{n_1, n_2, -n_1+n_2} = \frac{e^{i(n_1-n_2+n_1-n_2)\frac{\pi}{2}}}{n_1 n_2} [1 - e^{in_1\xi} - e^{-in_2\xi} + e^{i(n_1-n_2)\xi}] e^{i(-n_1+n_2)\phi}$$

$$[0566] \quad e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\operatorname{simn}(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$[0567] \quad [1 - e^{in_1\xi} - e^{-in_2\xi} + e^{i(n_1-n_2)\xi}] =$$

$$[0568] \quad = 1 - \cos(n_1\xi) - i\sin(n_1\xi) - \cos(n_2\xi) + i\sin(n_2\xi) + \cos((n_1-n_2)\xi) + i\sin((n_1-n_2)\xi)$$

$$[0569] \quad = 1 - \cos(n_1\xi) - \cos(n_2\xi) + \cos((n_1-n_2)\xi) - i[\sin(n_1\xi) - \sin(n_2\xi) - \sin((n_1-n_2)\xi)]$$

$$[0570] \quad e^{i(-n_1+n_2)\phi} = \cos((-n_1+n_2)\phi) + i\sin((-n_1+n_2)\phi)$$

$$[0571] \quad ReM_{n_1, n_2, -n_1+n_2} = \frac{(-1)^{n_1-n_2}}{n_1 n_2} \{ [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 - n_2) \xi)] \cos((-n_1 + n_2) \phi) +$$

$$[0572] \quad + [\sin(n_1 \xi) - \sin(n_2 \xi) - \sin((n_1 - n_2) \xi)] \sin((-n_1 + n_2) \phi) \}$$

$$[0573] \quad \text{注意如果 } n_1=n_2, \text{ 则 } ReM_{n_1, n_2, -n_1+n_2} = ReM_{n, n, 0} = \frac{1}{n^2} \{ [1 - \cos(n \xi) - \cos(n \xi) +$$

$$[0574] \quad \cos((0) \xi)] \cos((0) \phi) + [\sin(n \xi) - \sin(n \xi) - \sin((0) \xi)] \sin((0) \phi) \} = \frac{1}{n^2} \{ 2[1 - \cos(n \xi)] \}$$

$$2\pi N \times \left\{ \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} [2ReM_{n_1, n_2, -n_1+n_2}] I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} \right\}_{n_2-n_1=0} = 8\pi N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [1 - \cos(n \xi)] I_{n, n, 0}$$

[0575] 其为从第二均质项得到的结果。因此, 如果允许 $n_1=n_2$, 可以省略第二均质项。再

$$\text{次类似地, } M_{n_1, n_2, n_3} = \frac{e^{i(n_1-n_2-n_3)\frac{\pi}{2}}}{n_1 n_2} [1 - e^{in_1 \xi} - e^{-in_2 \xi} + e^{i(n_1-n_2)\xi}] e^{in_3 \phi}$$

[0576]

⇒

$$[0577] \quad M_{-n_1, n_2, n_3} = -\frac{e^{i(-n_1-n_2-n_3)\frac{\pi}{2}}}{n_1 n_2} [1 - e^{-in_1 \xi} - e^{-in_2 \xi} + e^{i(-n_1-n_2)\xi}] e^{in_3 \phi}$$

$$[0578] \quad M_{-n_1, n_2, n_1+n_2} = -\frac{e^{i(-n_1-n_2)\pi}}{n_1 n_2} [1 - e^{-in_1 \xi} - e^{-in_2 \xi} + e^{i(-n_1-n_2)\xi}] e^{i(n_1+n_2)\phi}$$

$$[0579] \quad [M_{-n_1, n_2, n_1+n_2}] = -\frac{(-1)^{n_1+n_2}}{n_1 n_2} [1 - e^{-in_1 \xi} - e^{-in_2 \xi} + e^{i(-n_1-n_2)\xi}] e^{i(n_1+n_2)\phi}$$

$$[0580] \quad [1 - e^{-in_1 \xi} - e^{-in_2 \xi} + e^{i(-n_1-n_2)\xi}] = 1 - \cos(-n_1 \xi) - i \sin(-n_1 \xi) - \cos(-n_2 \xi) - i \sin(-n_2 \xi)$$

$$[0581] \quad + \cos(-(n_1 + n_2) \xi) + \sin(-(n_1 + n_2) \xi)$$

$$[0582] \quad = 1 - \cos(n_1 \xi) + i \sin(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + i \sin(n_2 \xi)$$

$$[0583] \quad + \cos((n_1 + n_2) \xi) - i \sin((n_1 + n_2) \xi)$$

$$[0584] \quad = [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 + n_2) \xi)]$$

$$[0585] \quad + i [\sin(n_1 \xi) + \sin(n_2 \xi) - \sin((n_1 + n_2) \xi)]$$

$$[0586] \quad e^{i(n_1+n_2)\phi} = \cos((n_1 + n_2) \phi) + i \sin((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0587] \quad [1 - e^{-in_1 \xi} - e^{-in_2 \xi} + e^{i(-n_1-n_2)\xi}] e^{i(n_1+n_2)\phi}$$

$$[0588] \quad = [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 + n_2) \xi)] \cos((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0589] \quad - [\sin(n_1 \xi) + \sin(n_2 \xi) - \sin((n_1 + n_2) \xi)] \sin((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0590] \quad i [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 + n_2) \xi)] \sin((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0591] \quad + i [\sin(n_1 \xi) + \sin(n_2 \xi) - \sin((n_1 + n_2) \xi)] \cos((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0592] \quad Re[M_{-n_1, n_2, n_1+n_2}] = -\frac{(-1)^{n_1+n_2}}{n_1 n_2} \{ [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 + n_2) \xi)] \cos((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0593] \quad + [-\sin(n_1 \xi) - \sin(n_2 \xi) + \sin((n_1 + n_2) \xi)] \sin((n_1 + n_2) \phi) \}$$

$$[0594] \quad E = 4\pi N \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1-n_2}}{n_1 n_2} \{ [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 - n_2) \xi)] \cos((-n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0595] \quad + [\sin(n_1 \xi) - \sin(n_2 \xi) - \sin((n_1 - n_2) \xi)] \sin((-n_1 + n_2) \phi) \} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2}$$

$$[0596] \quad - 4\pi N \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2}}{n_1 n_2} \{ [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 + n_2) \xi)] \cos((n_1 + n_2) \phi)$$

$$[0597] \quad + [-\sin(n_1 \xi) - \sin(n_2 \xi) + \sin((n_1 + n_2) \xi)] \sin((n_1 + n_2) \phi) \} I_{n_1, n_2, n_1+n_2}$$

[0598] 对于 $\xi = \pi$ 的情况, 得到

[0599]

$$\begin{aligned} [1 - \cos(n_1 \pi) - \cos(n_2 \pi) + \cos((n_1 - n_2) \pi)] &= [1 - (-1)^{n_1} - (-1)^{n_2} + (-1)^{n_1-n_2}] \\ &= \begin{cases} 4, & (n_1, n_2 \text{ 均为奇数}) \\ 0, & (n_1, n_2 \text{ 均为偶数}) \text{ 或者 } (n_1 \text{ 奇数并且 } n_2 \text{ 偶数}) \text{ 或者 } (n_1 \text{ 偶数并且 } n_2 \text{ 奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

$$[0600] \quad [\sin(n_1 \pi) - \sin(n_2 \pi) - \sin((n_1 - n_2) \pi)] = 0 ;$$

$$[-\sin(n_1 \pi) - \sin(n_2 \pi) + \sin((n_1 + n_2) \pi)] = 0$$

[0601] 注意对于奇数的 n_1, n_2 , 得到 $(-1)^{n_2} = -1$ 以及 $(-1)^{n_1-n_2} = 1$, 因此:

$$[0602] \quad E = 16\pi N \left[\sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{n_1 n_2} [\cos((-n_1 + n_2) \phi) I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} + \cos((n_1 + n_2) \phi) I_{n_1, n_2, n_1+n_2}] \right]$$

[0603]

$$\begin{aligned} H_{BF}(\mathbf{k}) &= \int d^2(\mathbf{z} - \mathbf{r}) h_{BF}(\mathbf{z} - \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]} = \\ &2\pi N \xi^2 I_{0,0,0} + \\ &+ 8\pi N \xi \sum_{n=1, \text{even}}^{\infty} \frac{1}{n} [\sin(n\phi) - \sin(n\phi - n\xi)] I_{0,n,n} \\ &+ 4\pi N \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1-n_2}}{n_1 n_2} \{ [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 - n_2) \xi)] \cos((-n_1 + n_2) \phi) \\ &\quad + [\sin(n_1 \xi) - \sin(n_2 \xi) - \sin((n_1 - n_2) \xi)] \sin((-n_1 + n_2) \phi) \} I_{n_1, n_2, -n_1+n_2} \\ &- 4\pi N \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2}}{n_1 n_2} \{ [1 - \cos(n_1 \xi) - \cos(n_2 \xi) + \cos((n_1 + n_2) \xi)] \cos((n_1 + n_2) \phi) \\ &\quad + [-\sin(n_1 \xi) - \sin(n_2 \xi) + \sin((n_1 + n_2) \xi)] \sin((n_1 + n_2) \phi) \} I_{n_1, n_2, n_1+n_2} \end{aligned}$$

[0604] 对于 $\xi = \pi$ 的情况:

[0605]

$$H_{BF}(\mathbf{k})|_{\xi=\pi} = 2\pi^3 N I_{0,0,0} +$$

$$16\pi N \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{n_1 n_2} [\cos((n_2 - n_1)\phi) I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} + \cos((n_1 + n_2)\phi) I_{n_1, n_2, n_1 + n_2}]$$

[0606] 附件 A III :进行积分以获得针对 $\xi = \pi$ 的 $H_{BF}(\mathbf{k})$

[0607] 通过以更一般性的形式开始重复针对 $\xi = \pi$ 的计算 :

$$[0608] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = N \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i^{2n_1-2n_2}}{n_1 n_2} (e^{i(n_1-n_2)\pi} - e^{-in_2\pi} - e^{in_1\pi} + 1) e^{i(n_2-n_1)\phi} I_{n_1, n_2, n_2-n_1}$$

[0609] 注意等式 :

[0610]

$$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = \begin{cases} 1, & n = \text{偶数} \\ -1, & n = \text{奇数} \end{cases}$$

[0611] 并且利用该等式检查 $n_1=0$ 和 $n_2=0$ 的情况 :

[0612]

$$\frac{2\pi i^{n_1-2n_2}}{n_1 n_2} (e^{i(n_1-n_2)\pi} - e^{-in_2\pi} - e^{in_1\pi} + 1) =$$

[0613]

$$= \begin{cases} 2\pi^3 & n_1 = 0, n_2 = 0 \\ 2\pi i^{-2n_2} \frac{i\pi e^{-in_2\pi} - i\pi}{n_2}; & \begin{cases} 0; & n_1 = 0, n_2 \neq 0 (\text{偶数}) \\ \frac{4i\pi^2}{n_2}; & n_1 = 0, n_2 \neq 0 (\text{奇数}) \end{cases} \\ 2\pi i^{2n_1} \frac{-i\pi e^{in_1\pi} + i\pi}{n_1}; & \begin{cases} 0; & n_2 = 0, n_1 \neq 0 (\text{偶数}) \\ -\frac{4i\pi^2}{n_1} & n_2 = 0, n_1 \neq 0 (\text{奇数}) \end{cases} \\ \frac{2\pi i^{2n_1-2n_2}}{n_1 n_2} (e^{i(n_1-n_2)\pi} - e^{-in_2\pi} - e^{in_1\pi} + 1) & \begin{cases} 0; & n_1 \neq 0 (\text{偶数}), n_2 \neq 0 (\text{偶数}) \\ 0; & n_1 \neq 0 (\text{奇数}), n_2 \neq 0 (\text{偶数}) \\ 0; & n_1 \neq 0 (\text{偶数}), n_2 \neq 0 (\text{奇数}) \\ \frac{8\pi}{n_1 n_2}; & n_1 \neq 0 (\text{奇数}), n_2 \neq 0 (\text{奇数}) \end{cases} \end{cases}$$

[0614] 因此 :

$$[0615] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = N \left\{ 2\pi^3 I_{0,0,0} + \sum_{n_2=-\infty(\text{odd}, n_2 \neq 0)}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_2} e^{in_2\phi} I_{0, n_2, n_2} - \sum_{n_1=-\infty(\text{odd}, n_1 \neq 0)}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_1} e^{-in_1\phi} I_{n_1, 0, -n_1} \right.$$

$$[0616] \quad \left. + \sum_{n_2=-\infty(\text{odd}, n_2 \neq 0)}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty(\text{odd}, n_1 \neq 0)}^{\infty} \frac{8\pi}{n_1 n_2} e^{i(n_2-n_1)\phi} I_{n_1, n_2, n_2-n_1} \right\}$$

$$[0617] \quad I_{n_1, 0, -n_1} = (-1)^{n_1} I_{n_1, 0, n_1}; \quad I_{n_1, 0, n_1} = I_{0, n_1, n_1}$$

[0618] “第二项” T_2 变为 :

$$[0619] \quad T_2 = \sum_{n_2=-\infty(\text{odd}, n_2 \neq 0)}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_2} e^{in_2\phi} I_{0, n_2, n_2} - \sum_{n_1=-\infty(\text{odd}, n_1 \neq 0)}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_1} e^{-in_1\phi} I_{n_1, 0, -n_1}$$

$$[0620] \quad = \sum_{n_2=-\infty(\text{odd}, n_2 \neq 0)}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_2} [e^{in_2\phi} I_{0, n_2, n_2} - e^{-in_2\phi} I_{n_2, 0, -n_2}]$$

$$[0621] \quad = \sum_{n_2=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_2} [e^{in_2\phi} I_{0, n_2, n_2} - e^{-in_2\phi} I_{n_2, 0, -n_2} - e^{-in_2\phi} I_{0, -n_2, -n_2} + e^{in_2\phi} I_{-n_2, 0, n_2}]$$

$$[0622] \quad = \sum_{n_2=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_2} [e^{in_2\phi} I_{0, n_2, n_2} - e^{-in_2\phi} I_{n_2, 0, -n_2} - e^{-in_2\phi} I_{0, -n_2, -n_2} + e^{in_2\phi} I_{-n_2, 0, n_2}]$$

$$[0623] \quad = \sum_{n_2=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{4i\pi^2}{n_2} I_{0, n_2, n_2} [e^{in_2\phi} + e^{-in_2\phi} - e^{-in_2\phi} - e^{in_2\phi}] = 0$$

[0624]

⇨

$$[0625] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = N \left\{ 2\pi^3 I_{0,0,0} + \sum_{n_2=-\infty(\text{odd}, n_2 \neq 0)}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty(\text{odd}, n_1 \neq 0)}^{\infty} \frac{8\pi}{n_1 n_2} e^{i(n_2 - n_1)\phi} I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} \right\}$$

[0626] 对于二重合项,注意到对于 $n_2 = -n_2$ 和 $n_1 = -n_1$,

[0627] $n_1(\text{odd}), n_2(\text{odd}) : [J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)]^{14}$ 的情况 :

$$[0628] \quad I_{-n_1, -n_2, -n_2 + n_1} = (-1)^{n_1 + n_2 + n_2 - n_1} I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} = (-1)^{2n_2} I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} = I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} =>$$

$$[0629] \quad \frac{8\pi}{n_1 n_2} e^{i(n_2 - n_1)\phi} I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} + \frac{8\pi}{(-n_1)(-n_2)} e^{-i(n_2 - n_1)\phi} I_{-n_1, -n_2, -n_2 + n_1}$$

$$= \frac{8\pi}{n_1 n_2} I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} (e^{i(n_2 - n_1)\phi} + e^{-i(n_2 - n_1)\phi}) = \frac{16\pi}{n_1 n_2} I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} \cos((n_2 - n_1)\phi)$$

[0630] -----

[0631] 并且注意对于 $(n_2 = n_2 \text{ 并且 } n_1 = -n_1) + (n_2 = -n_2 \text{ 并且 } n_1 = n_1)$ 的情况 :

[0632] $n_1(\text{odd}), n_2(\text{odd})$:

$$[0633] \quad I_{-n_1, n_2, (n_2 + n_1)} = (-1)^{-n_2 + n_1 - n_2 - n_1} I_{n_1, -n_2, -(n_2 + n_1)} = (-1)^{-2n_2} I_{n_1, -n_2, -(n_2 + n_1)} = I_{n_1, -n_2, -(n_2 + n_1)}$$

[0634]

⇨

$$[0635] \quad \frac{8\pi}{(-n_1)(n_2)} e^{i(n_2 + n_1)\phi} I_{-n_1, n_2, n_2 + n_1} + \frac{8\pi}{(n_1)(-n_2)} e^{-i(n_2 + n_1)\phi} I_{n_1, -n_2, -(n_2 + n_1)}$$

$$[0636] \quad = -\frac{8\pi}{n_1 n_2} (e^{i(n_2 + n_1)\phi} + e^{-i(n_2 + n_1)\phi}) I_{-n_1, n_2, (n_2 + n_1)} = -\frac{16\pi}{n_1 n_2} \cos(n_2 + n_1) I_{-n_1, n_2, (n_2 + n_1)}$$

$$[0637] \quad = \frac{16\pi}{n_1 n_2} \cos(n_2 + n_1) I_{n_1, n_2, n_2 + n_1}$$

[0638] ⇨ 因此可以用 [1 到 ∞] 代替 [-∞ 到 ∞], 得到 :

[0639]

$$H_{BF}(\mathbf{k}) = N \left\{ 2\pi^3 I_{0,0,0} + \sum_{n_2=1(\text{odd}), n_1=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{16\pi}{n_1 n_2} \left[\cos((n_2 - n_1)\phi) I_{n_1, n_2, n_2 - n_1} + \cos((n_2 + n_1)\phi) I_{n_1, n_2, n_2 + n_1} \right] \right\} \quad (23)$$

[0640]

[0641] ¹⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function

[0642] 附件 B

[0643] 针对受限视场半球孔径的衍射断层成像算法

[0644] 讨论基于三维波束成形 (BF) 算法的三维 DT 的新推导, 作为对诸如滤波反向传播法¹⁵这样的标准 DT 算法的替代方法。[0645] 假定通过对下式的标量波场 ψ 解来描述散射问题,

[0646]

$$H\psi(\mathbf{r}, k_0 \hat{\mathbf{r}}_0, \omega) = -O(\mathbf{r}, \omega)\psi(\mathbf{r}, k_0 \hat{\mathbf{r}}_0, \omega) \quad (1)$$

[0647] 其中 H 是亥姆霍兹算子 ($\nabla^2 + k_0^2$), k_0 是背景波数 ($2\pi/\lambda$), $\hat{\mathbf{r}}_0$ 代表照射目标的入射平面波的方向, 并且 ω 是角频率。单位向量 $\hat{\mathbf{r}}_0$ 由球坐标系的角 θ_t 和 ϕ_t 定义。错误! 未找到引用源。[0648] 通过所谓的目标函数来描述目标, 目标函数依赖于用于对目标进行探测的波场的类型: 对于电磁波感测, 其通过关系 $O(\mathbf{r}) = k_0^2 [n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1]$ 与折射率¹⁶ $n(\mathbf{r}, \omega)$ 有关, 并且对于声学波, 其与声速和衰减系数¹⁷ 有关。具体地, 对于无损耗目标

$$O(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2 \left[\left(\frac{c_0}{c(\mathbf{r}, \omega)} \right)^2 - 1 \right] \quad (2)$$

[0650] 其中 c_0 是目标所浸没的均质背景的声速, $c(\mathbf{r}, \omega)$ 是目标内的本地声速。由于色散和能量耗散现象, 目标函数依赖于 ω 。在本节其余部分进行的分析将考虑单色波场; 因此, 省略了对 ω 的明显依赖。[0651] 半球上的三维波束成形算法[0652] 假定散射振幅 $f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t)$ 可以作照射和检测方向的连续函数而进行测量, 即, 对于半球, $\theta_r, \theta_t \in [0, \pi]$ 并且 $\phi_r, \phi_t \in [0, \pi]$, (请注意对于完整球, $\phi_r, \phi_t \in [0, 2\pi]$), 这些角分别是球坐标系中的接收方向和透射方向。原理上, 这可以通过包围目标的收发器的半球阵列来实现。[0653] 标准 BF 通过将入射波束聚焦到目标空间中的 r 和 z 来在像空间的点 z 处产生目标的图像。得到的散射场随后被相移并且在阵列的孔径上积分, 使得仅仅焦点对散射场的贡献被相干地相加。通过 BF 函数获得此两步骤处理

[0654]

[0655] ¹⁵Devaney, A. J. 1982, "A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography", Ultrason. Imaging 4, 336-350.

[0656] ¹⁶Born, M. & Wolf, E. 1999 Principles of optics. Cambridge, UK : Cambridge University Press. NY : IEEE Press.

[0657]

$$\mathfrak{S}_{BF} = \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \int_0^\pi d\phi_t \int_0^\pi d\theta_t \sin \theta_t \times$$

[0658]

$$\exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot \mathbf{z}] f(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t) \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) \cdot \mathbf{z}] \quad (3)$$

[0659] 其中 $\hat{\mathbf{u}}$ 是与角 θ 和 ϕ 相关联的单位向量。如针对二维情况由脚注¹⁸所讨论的, 式(III)中的第二个指数代表透射中的聚焦, 而第一个对应于接收的散射场的聚焦。通过考虑在位置 \mathbf{r} 的点散射体的图像, 可以获得与函数(2)相关联的点扩散函数(PSF)。在此情况下, 自由散射振幅是

$$f_{free}(\theta_r, \theta_t, \phi_r, \phi_t) = \exp\{-ik_0[\hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) + \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r)] \cdot \mathbf{r}\} \quad (4)$$

[0661] 并且 PSF 为

$$h_{BF} = \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \int_0^\pi d\phi_t \int_0^\pi d\theta_t \sin \theta_t \times \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]] \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_t, \phi_t) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]] \quad (5)$$

[0663] 球面波展开:

$$\exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]] = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) P_l[\cos(\text{angle}(\hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})))]$$

[0665] 其中 j_l 是 l 阶球贝塞尔函数并且 P_l 是勒让德多项式。

$$\int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \exp[ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]] =$$

$$= \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \left\{ j_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) + \sum_{l=1}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) P_l[\cos(\text{angle}(\hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{r})))] \right\} =$$

[0668] 将代表 $\mathbf{z} - \mathbf{r}$ 的角定义为 θ' , ϕ' 。下面引入球面谐波的加法公式¹⁹:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta_r, \phi_r) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

[0670] 其中

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

[0672] 因此, θ_r 和 ϕ_r 上的积分变为:

$$\int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r Y_{lm}^*(\theta_r, \phi_r)$$

[0674]

$$Y_{lm}^*(\theta_r, \phi_r) \equiv \begin{cases} K_l^m P_l^{|m|}(\cos \theta_r) \cos(|m|\phi_r) & \text{如果 } m \geq 0 \\ K_l^m P_l^{|m|}(\cos \theta_r) \sin(|m|\phi_r) & \text{如果 } m < 0 \end{cases}$$

[0675]

[0676] ¹⁸Simonetti, F. & Huang, L. 2008, "From beamforming to diffraction tomography", J. Appl.

[0677] Phys. 103, 103-110.

[0678] [19http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jkl/lectures/node102.html](http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jkl/lectures/node102.html)

[0679] 其中

$$[0680] \quad K_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$$

[0681] 如已知的,从以上定义得出,球面谐波在 θ_r, ϕ_r 是可分离的。

[0682] 现在定义以下积分²⁰

$$[0683] \quad \int_{\theta_-}^{\theta_+} P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \int_{z_-}^{z_+} P_l^{|m|}(z) \, dz = \hat{P}_l^{|m|}(\theta_-, \theta_+)$$

[0684] 其中 $z = \cos \theta$, 并且 $z_{\pm} = \cos \theta_{\pm}$ 。

[0685] 还定义

[0686]

$$\Phi^m(\phi) = \begin{cases} \cos(m\phi) & \text{如果 } m \geq 0 \\ \sin(|m|\phi) & \text{如果 } m < 0 \end{cases}$$

[0687]

$$\hat{\Phi}^m(\phi) = \int \Phi^m(\phi) \, d\phi = \frac{1}{m} \begin{cases} \sin(m\phi) & \text{如果 } m \geq 0 \\ \cos(m\phi) & \text{如果 } m < 0 \end{cases}$$

$$[0688] \quad \hat{\Phi}^m(\phi_-, \phi_+) = \int_{\phi_-}^{\phi_+} \Phi^m(\phi) \, d\phi$$

[0689] 并且利用 $\hat{\Phi}^m$ 和 $\hat{P}_l^{|m|}$, 定义

$$[0690] \quad \hat{Y}_{lm}(\theta_-, \theta_+, \phi_-, \phi_+) = K_l^m \hat{P}_l^{|m|}(\theta_-, \theta_+) \hat{\Phi}^m(\phi_-, \phi_+)$$

[0691] 现在返回波束成形项并且考虑:

[0692]

$$g_r(\mathbf{z} - \mathbf{r}) = \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \exp\{ik_0 \hat{\mathbf{u}}(\theta_r, \phi_r) \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{r}]\} =$$

[0693]

$$= \int_0^\pi d\phi_r \int_0^\pi d\theta_r \sin \theta_r \left\{ j_0(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \right.$$

[0694]

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k_0 |\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta_r, \phi_r) Y_{lm}(\theta', \phi') \right\} =$$

[0695]

$$= 2\pi j_0(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) + \sum_{l=1}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(0, \pi, 0, \pi) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

[0696]

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{lm}(\theta', \phi')$$

[0697] 其中 $A_l^m = i^l(2l+1) \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(0, \pi, 0, \pi) = 4\pi i^l Y_{lm}^*(0, \pi, 0, \pi)$ [0698] 针对透射角获得相同结果, 即, 量 $g_t(\mathbf{z}-\mathbf{r})$, 因此现在计算由下式给出的 $h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r})$ 的三维傅里叶变换 $H_{BF}(\mathbf{k})$

[0699]

[0700] ²⁰W. J. Arosz, N. Carr & H. W. Jensen, "Importance Sampling Spherical Harmonics", Journal compilation, 2008, The Eurographics Association and BlackwellPublishing Ltd $h_{BF}(\mathbf{z}-\mathbf{r}) = g_r(\mathbf{z}-\mathbf{r})g_t(\mathbf{z}-\mathbf{r})$

$$= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{lm}(\theta', \phi') \right)$$

$$\times \left(\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{l'}^{m'} j_{l'}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{l'm'}(\theta', \phi') \right) \quad (6)$$

$$[0703] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r g_r(\mathbf{z}-\mathbf{r})g_t(\mathbf{z}-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{lm}(\theta', \phi') \right)$$

$$[0704] \quad \times \left(\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{l'}^{m'} j_{l'}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{l'm'}(\theta', \phi') \right)$$

[0705] 再次使用球面波展开:

$$[0706] \quad \exp\{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]\} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|)P_l[\cos(\text{angle}(\mathbf{k}\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{r})))]$$

[0707] 用 θ, ϕ 表示 \mathbf{k} 的角, 并且和以前一样, θ', ϕ' 是 $-\mathbf{r}$ 的角(加法定理):

$$[0708] \quad \exp\{-i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{z}-\mathbf{r}]\} = \sum_{l''=0}^{\infty} i^{l''}(2l''+1)j_{l''}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{4\pi}{2l''+1} \sum_{m''=-l''}^{l''} Y_{l''m''}^*(\theta, \phi) Y_{l''m''}(\theta', \phi')$$

$$[0709] \quad H_{BF} = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi'$$

$$[0710] \quad \left(\sum_{l''=0}^{\infty} i^{l''}(2l''+1)j_{l''}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) \frac{4\pi}{2l''+1} \sum_{m''=-l''}^{l''} Y_{l''m''}^*(\theta, \phi) Y_{l''m''}(\theta', \phi') \right) \times$$

$$[0711] \quad \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{lm}(\theta', \phi') \right) \times \left(\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{l'}^{m'} j_{l'}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) Y_{l'm'}(\theta', \phi') \right)$$

[0712]
$$H_{BF}(\mathbf{k}) = \sum_{l,m,l',m',l'',m''} B_{l''} C_{l,m,l',m',l'',m''} Y_{l''}^*(\theta, \phi) \quad (7)$$

[0713]
$$\times \int_0^\infty r^2 dr j_{l''}(|\mathbf{k}||\mathbf{z}-\mathbf{r}|) j_{l'}(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|) j_l(k_0|\mathbf{z}-\mathbf{r}|)$$

[0714] 其中 $C_{l,m,l',m',l'',m''} = \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' Y_{lm}(\theta', \phi') Y_{l'm'}(\theta', \phi') Y_{l''m''}(\theta', \phi')$ 并且 $B_{l''} = 4\pi i^{l''}$ 。

[0715] 下面关注于 3 个球贝塞尔函数的积的积分²¹：

[0716]
$$I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k_1, k_2, k_3) \equiv \int_0^\infty r^2 dr j_{\lambda_1}(k_1 r) j_{\lambda_2}(k_2 r) j_{\lambda_3}(k_3 r)$$

[0717]
$$I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k_1, k_2, k_3) = \frac{\pi \beta(\Delta)}{4k_1 k_2 k_3} i^{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3} (2\lambda_3 + 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_1}{k_3}\right)^{\lambda_3}$$

[0718]
$$\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \sum_{L=0}^{\lambda_3} \left(\frac{2\lambda_3}{2L}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^L \sum_l (2l+1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 - L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[0719] _____

[0720] ²¹RMehremt, J T Londergant and M H Macfarlanet, " Analytic expressions for integrals of products of spherical Bessel function ", J.Phys.A:Math. Gen. 24(1991)1435-1453.

[0721]
$$\cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ L & \lambda_3 - L & l \end{matrix} \right\} P_l(\Delta)$$

[0722] 其中

[0723] $|k_1 - k_2| \leq k_3 \leq k_1 + k_2$ (封闭三角形, 角动量守恒)

[0724]
$$\Delta = \frac{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}{2k_1 k_2}$$

[0725] Δ 在 ± 1 之间并且是由 k_1, k_2 和 k_3 形成的三角形中 $\hat{\mathbf{k}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{k}}_2$ 之间的角的余弦。

[0726] 通过引入以下函数, 将 $\Delta = \pm 1$ 处的跳跃间断点正确地考虑在内, $I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; k_1, k_2, k_3)$ 的等式针对包括受限范围 $-1 \leq \Delta \leq 1$ 之外的值在内的全部实数 Δ 有效,

[0727]

$$\beta(\Delta) = \vartheta(1 - \Delta)\vartheta(1 + \Delta)$$

[0728] 其中 $\vartheta(y)$ 是修改的阶跃函数

[0729]

$$\vartheta(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2} & y = 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

[0730] $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是从中导出角动量三角形的 Wigner 3-j 符号²², 并且三个角动量的重

耦合涉及 6-j 符号 $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}$

[0731] 积分是

$$[0732] \quad I(l, l', l''; k, k_0, k_0) = \int_0^{\infty} r^2 dr j_{l''}(|\mathbf{k}||\mathbf{z} - \mathbf{r}|) j_{l'}(k_0|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) j_l(k_0|\mathbf{z} - \mathbf{r}|)$$

[0733] 因此得到半球以及实际上其它受限视角的 HBF 的解析式。下面考虑针对我们的示例的 Δ 值：

[0734] 利用 $k_1 = |\mathbf{k}|$ 并且 $k_2 = k_3 = k_0$, 得到：

$$[0735] \quad \Delta = \frac{|\mathbf{k}|^2 + k_0^2 - k_0^2}{2|\mathbf{k}|k_0} = \frac{|\mathbf{k}|}{2k_0}$$

[0736] 由于 $-1 \leq \Delta \leq 1$, 得到低通滤波：

$$[0737] \quad H_{BF} = g(k) \Pi(|\mathbf{k}|), \text{ 其中 } \Pi(|\mathbf{k}|) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{k}| < 2k_0 \\ 0 & |\mathbf{k}| > 2k_0 \end{cases} \quad (8)$$

[0738] DT 问题包括从一组散射实验中重构函数 $O(\mathbf{r})$ 。为此目的, 引入目标函数在空间频率域(K 空间)中的表示形式是方便的, 其通过对 $O(\mathbf{r})$ 进行三维傅里叶变换而得到。

$$[0739] \quad \tilde{O}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r O(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (9)$$

[0740] 现在考虑波束成形图像：

[0741] A _____

[0742] ²²Edmonds A R 1957 Angular Momentum in Quantum Mechanics(Princeton Princeton University Academic Press)

[0743]

$$\mathfrak{I}_{BF} = \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dr_2 \int_{-\infty}^{\infty} dr_3 O(\mathbf{r}) h(|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) \quad (10)$$

[0744] 其在空间频率域中为

$$[0745] \quad I_{BF}(\mathbf{k}) = \tilde{O}(\mathbf{k}) H_{BF}(\mathbf{k}) = g(\mathbf{k}) \tilde{O}(\mathbf{k}) \Pi(|\mathbf{k}|) \quad (11)$$

[0746] 尽管在整个球体上的 DT 产生低通滤波图像, $\tilde{O}(\mathbf{k})\Pi(|\mathbf{k}|)$, 新 BF 算法引入由附加滤波器 $g(\mathbf{k})$ 描述的失真。因此, 通过对 BF 图像应用滤波器 $\frac{1}{g(\mathbf{k})}$, 可以从 BF 图像获得 DT 图像。

再次, 这是对其它 DT 算法²³的替代方法。

[0747] 不失一般性, 可以选择平行于 z 轴的向量 \mathbf{k} , 即, $\theta = 0$ 并且 $\cos \theta = 1$ 。

[0748] 对此情况,

[0749]

$$Y_{l'' m''}^*(0, \phi) = \begin{cases} 1, & m'' = 0 \text{ 对于全部 } l'' \\ 0, & m'' \neq 0 \text{ 对于全部 } l'' \end{cases}$$

[0750] 因此该式变为与角度无关, 即, 仅依赖于 $|\mathbf{k}|$ ：

$$[0751] \quad H_{BF}(\mathbf{k}) = \sum_{l, m, l', m', l'', 0} B_{l''} C_{l, m, l', m', l'', 0} \times \int_0^{\infty} r^2 dr j_{l''}(|\mathbf{k}||\mathbf{z} - \mathbf{r}|) j_{l'}(k_0|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) j_l(k_0|\mathbf{z} - \mathbf{r}|) = H_{BF}(|\mathbf{k}|) \quad (12)$$

[0752] 其中,再次 $C_{l,m,l',m'} = \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' Y_{lm}(\theta', \phi') Y_{l'm'}(\theta', \phi') Y_{l''m''}(\theta', \phi')$ 并且 $B_{1''} = 4\pi i^{1''}$ 。

[0753] 因此,滤波函数 $f(k)$ 变为仅是 $|k|$ 的函数, $f(|k|)$ 。由于 $\Delta = \frac{|k|}{2k_0}$, 在此特殊坐标选择下滤波器 $f(|k|)$ 变为 $\frac{|k|}{2k_0}$ 情况下勒让德多项式的和。

[0754]
$$f(|k|) = \sum_n M_n P_n\left(\frac{|k|}{2k_0}\right)$$

[0755]

n	勒让德多项式 $P_n(x); x = \frac{ k }{2k_0}$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
...	...
n	$P_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-x)^k$

[0756] n 的相加符号化地表示需要被相加在一起的多个索引。请注意,在上述 $f(|k|)$ 的等式中 n 的相加中系数 M_n 是已知的,例如通过这个符号标记的加法中的多个索引的 3-j 和 6-j 符号的值,很多系数成为零。

[0757] ²³参见脚注 3

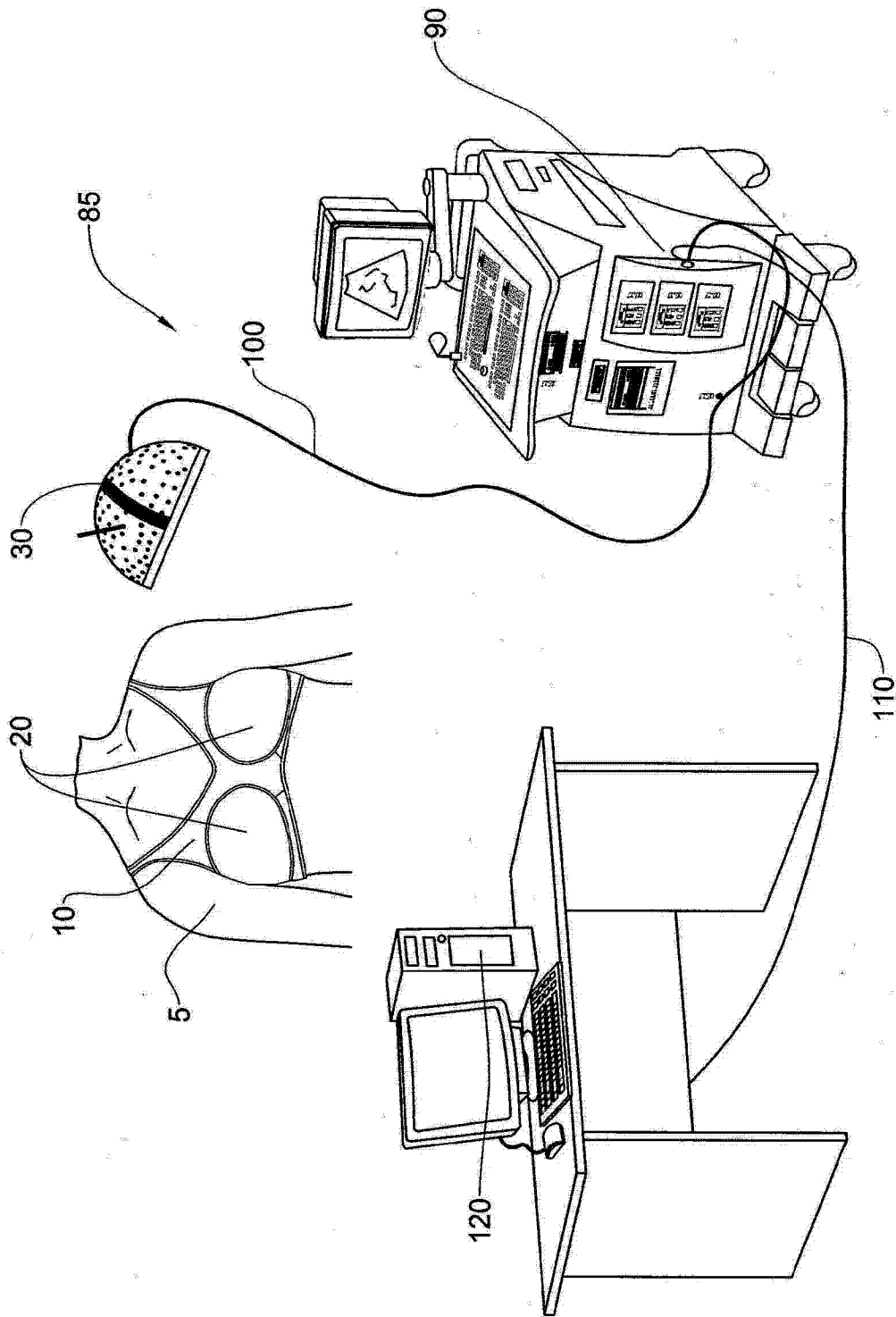


图 1

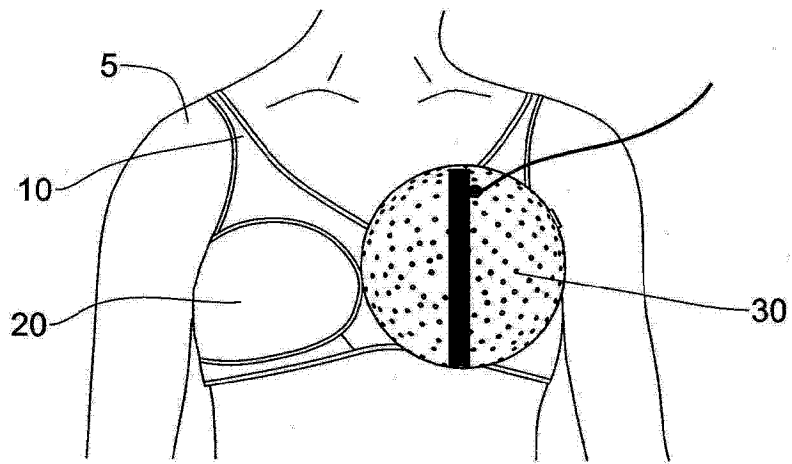


图 2

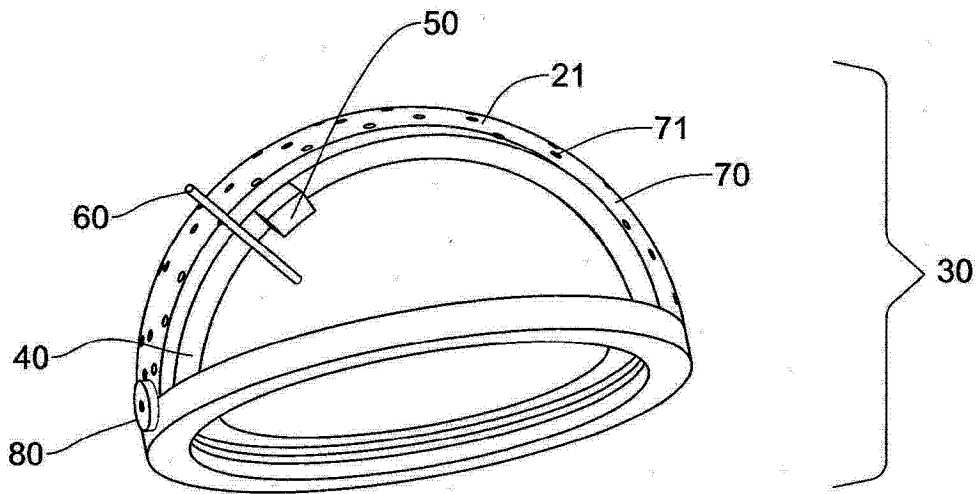
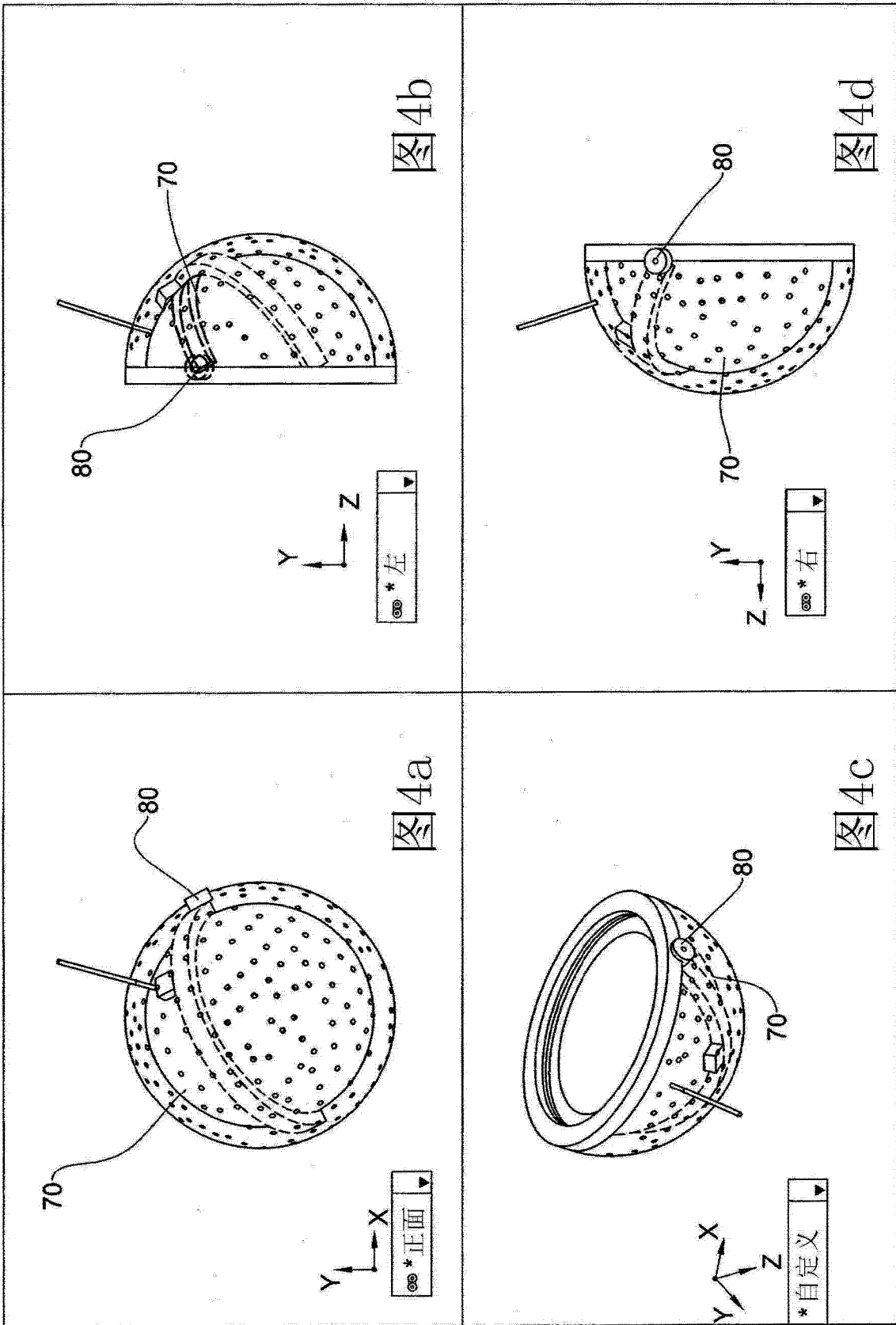


图 3



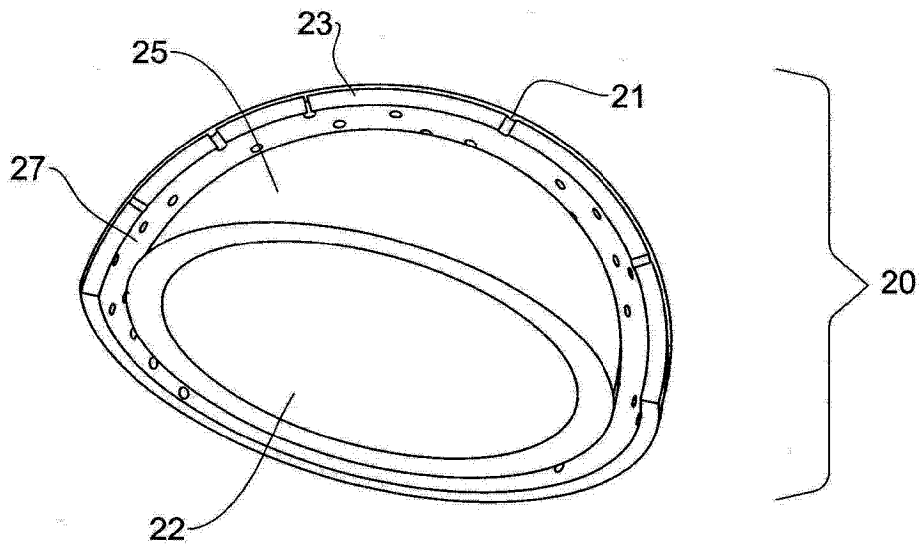


图 5

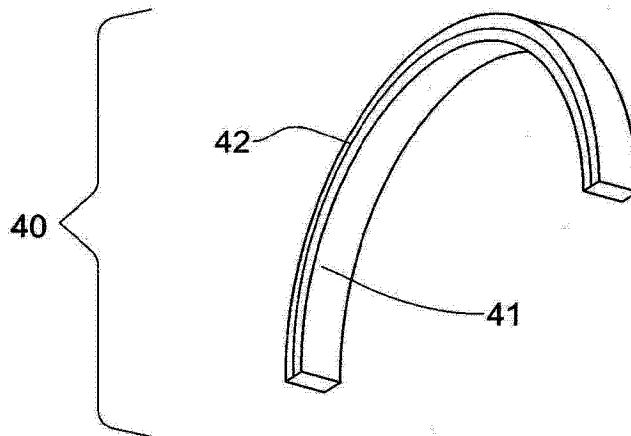


图 6

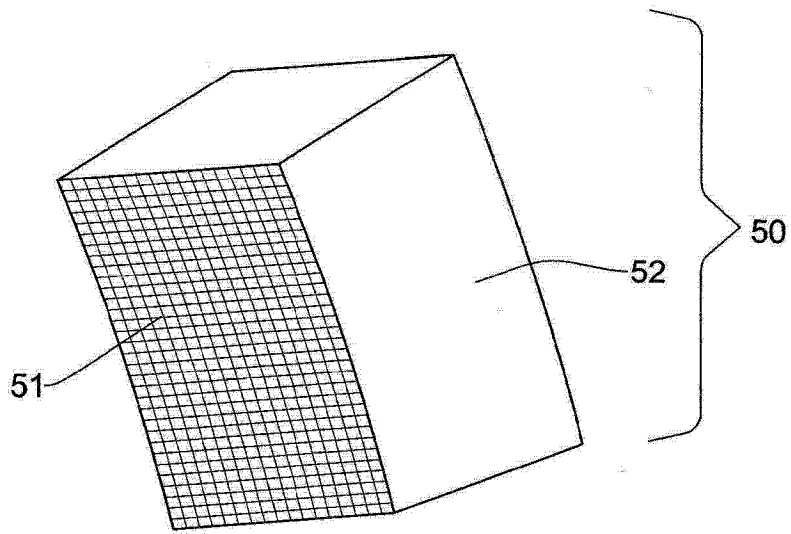


图 7

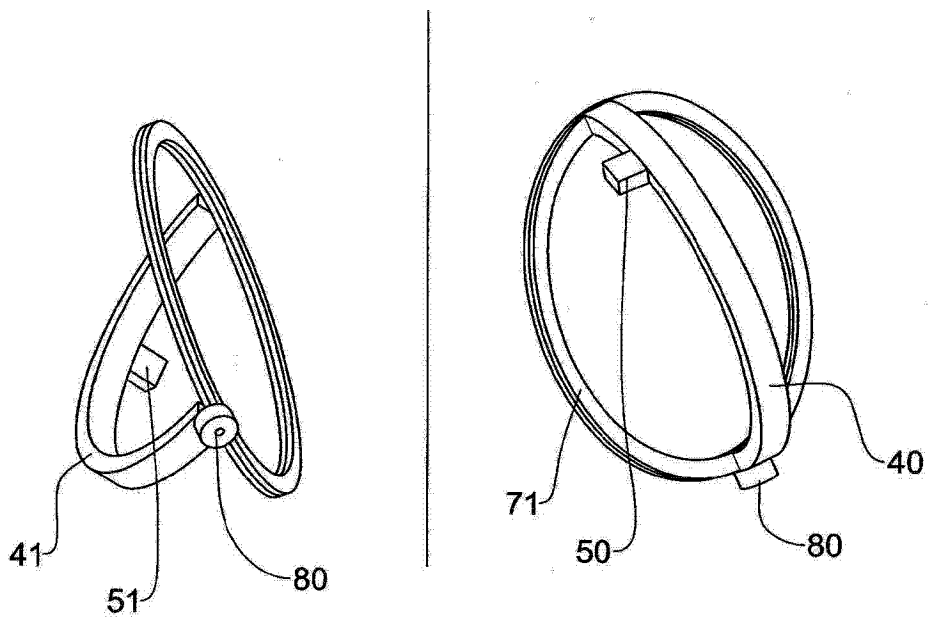


图 8

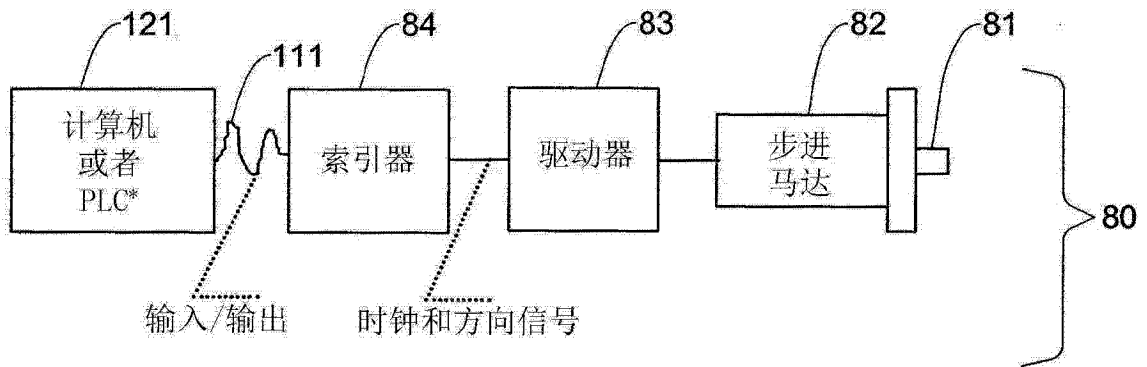
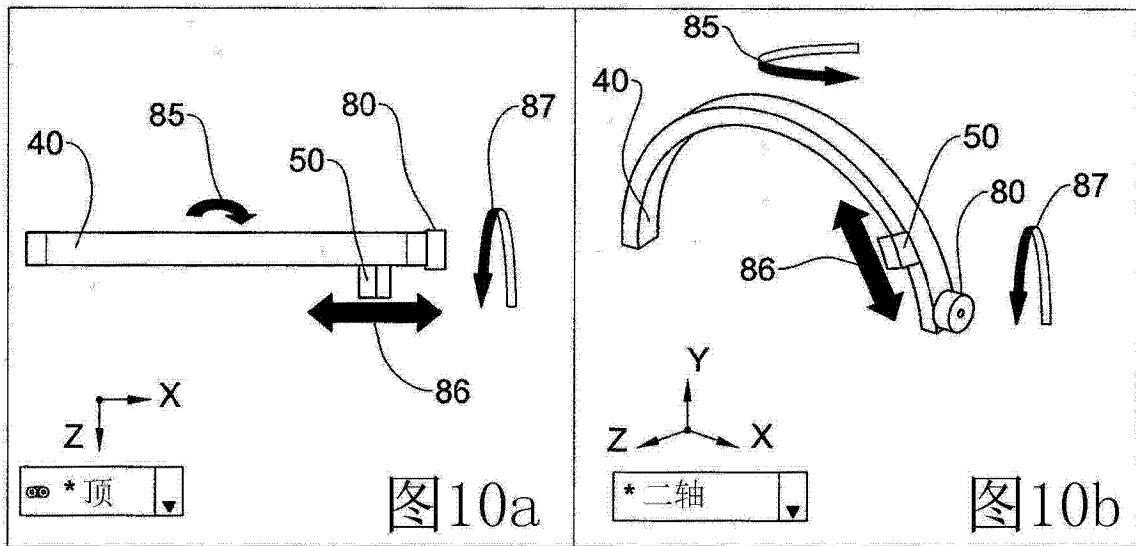


图 9



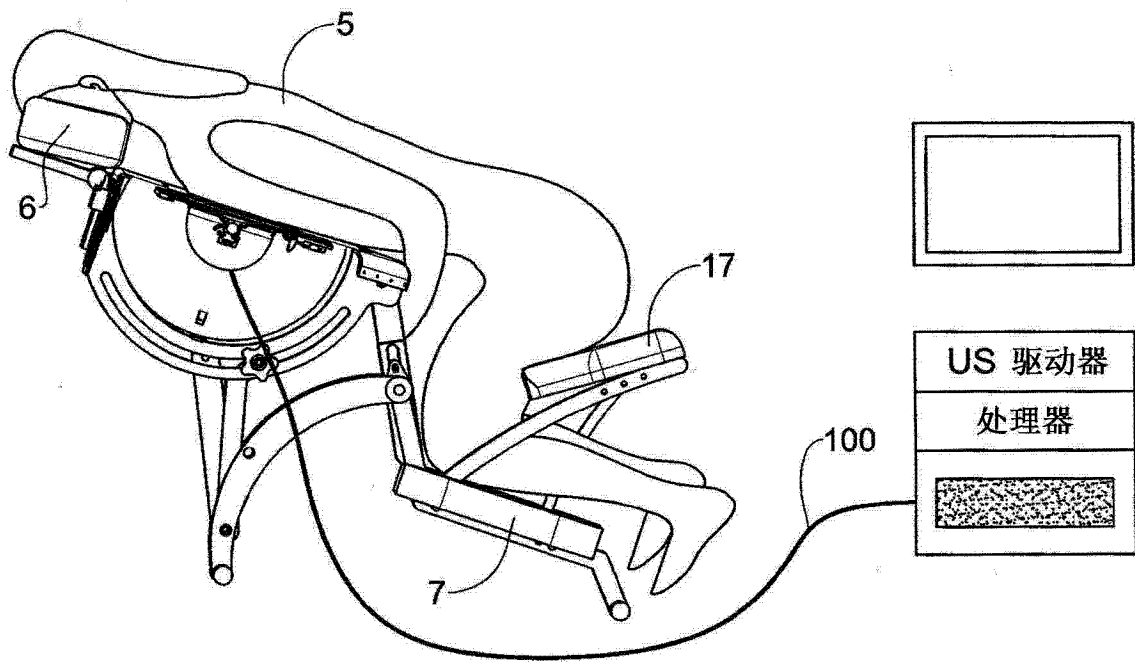
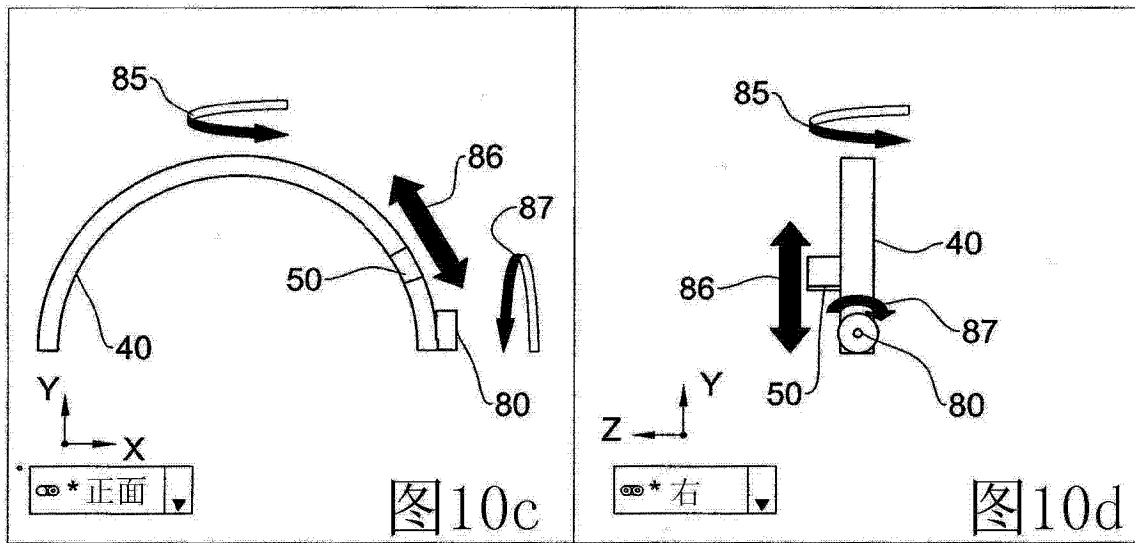


图 11

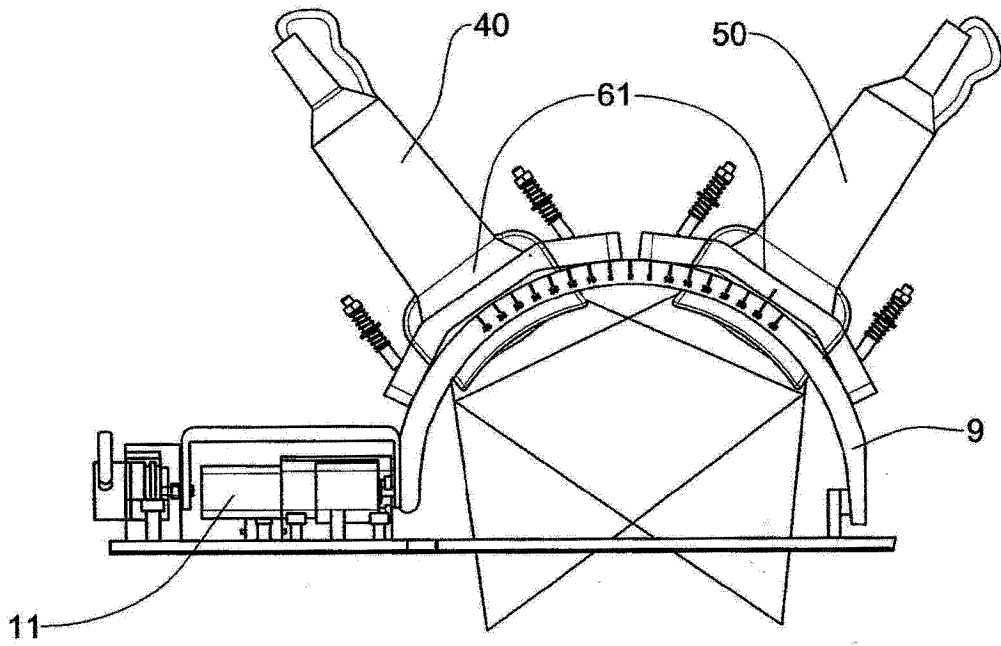


图 12

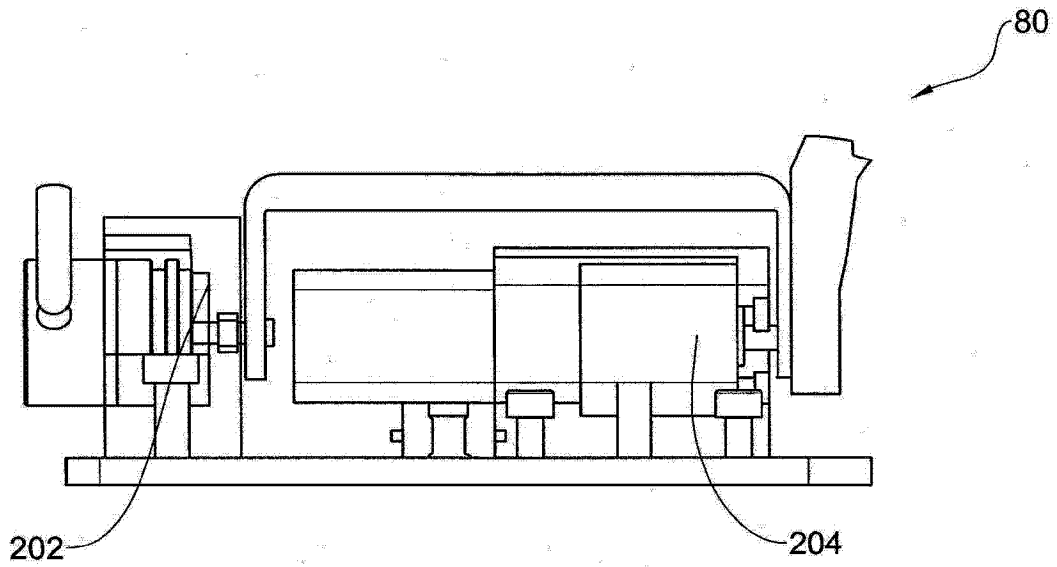


图 13

专利名称(译)	用于乳房的超声检测的系统和方法		
公开(公告)号	CN103415258B	公开(公告)日	2015-05-20
申请号	CN201180066669.5	申请日	2011-12-06
[标]发明人	M贝尔曼		
发明人	M·贝尔曼		
IPC分类号	A61B8/08 A61B8/13		
CPC分类号	A61B8/4461 A61B8/0825 A61B8/406 A61B8/4477 A61B8/461 A61B8/466		
代理人(译)	张旭东		
优先权	61/420098 2010-12-06 US		
其他公开文献	CN103415258A		
外部链接	Espacenet SIPO		

摘要(译)

本发明提供一种用于对身体部分的2D截面或者3D体积进行受限视场超声成像的系统和方法。超声传感器被配置为在空间上或者在时间上排列在受限视场圆弧中或者在诸如半球这样的凹面的至少一部分上。处理器从检测到的超声辐射计算波束成形 (BF) 函数并且从自由振幅计算点扩散函数 (PSF)。从用于生成身体部分的2D截面或者3D体积的图像的PSF的傅里叶变换 $HBF(k)$ 计算滤波器 $g(k)$ 。

